PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM GESTÃO ENVOLVENDO FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIAVEIS

Bolsista: Henrique Luiz da Silva – henrique.silva@fca.unicamp.br

Orientadora: Profª Drª Bianca Morelli R. Calsavara – bianca.calsavara@fca.unicamp.br.

FACULDADE DE CIÊNCIAS APLICADAS – FCA UNICAMP

Apoio: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Palavras-chave: Funções de Várias Variáveis – Problemas de Otimização – Multiplicadores de Lagrange

INTRODUÇÃO:

Problemas de otimização são problemas cujo objetivo é determinar os valores extremos de uma função, isto é, o maior ou menor valor que uma função pode assumir em um dado intervalo. Estes problemas são comuns em nossa vida diária e aparecem, por exemplo, quando procuramos determinar o nível de produção mais econômico de uma fabrica, as dimensões de embalagens de produtos que maximizam a capacidade das mesmas, etc.

O presente estudo foi desenvolvido com o objetivo de preencher lacunas relacionadas ao ensino do cálculo no curso de gestão de empresas, onde foi feito o estudo de cálculo diferencial para funções de várias variáveis, incluindo máximos e mínimos para essas funções. Utilizando tais ferramentas foram estudados problemas de otimização da área de gestão/administração envolvendo funções de duas ou mais variáveis.

A metodologia utilizada foi o estudo bibliográfico de livros relacionados ao assunto em questão.

DESENVOLVIMENTO:

Considerando-se que em situações diárias da carreira gerencial são confrontados problemas que, para serem resolvidos, dependem de duas ou mais variáveis, foram estudadas técnicas matemáticas que possibilitem encontrar um ponto ótimo capaz de obter o melhor aproveitamento de tais variáveis. Os passos necessários para a resolução desses problemas são os seguintes:

- Análise do número de variáveis relevantes e modelagem do problema através de uma função do tipo: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que associa um número real à $n-upla$ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais, denotadas por R^n o conjunto de todas essas $n-uplas$.
- Cálculo das derivadas parciais da função
- Realizar o teste da 1ª derivada onde, igualando-se as derivadas parciais encontradas a zero, encontramos os pontos que são candidatos a máximo, mínimo ou ponto de sela da função.
- Realizar o teste da 2ª derivada para analisar os pontos críticos encontrados. No caso de funções de duas variáveis, essa análise é feita através do discriminante ou hessiana de f que pode ser escrita na forma:

$$f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} \quad \text{ou} \quad D = \det\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Onde,

a) f tem um máximo local em (a,b) se $f_{xx} < 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} > 0$ em (a,b);

b) f tem um mínimo local em (a,b) se $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} > 0$ em (a,b);

c) f tem um ponto de sela em (a,b) se $f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} < 0$ em (a,b);

d) O teste é inconclusivo se $f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} = 0$ em (a,b). Nesse caso, devemos encontrar outra maneira de determinar o comportamento de f em (a,b).

<u>Exemplo:</u> Uma indústria produz dois produtos , A e B. O lucro diário da indústria pela venda de x unidades do produto A e y unidades do produto B é dado por:

$$L(x,y) = 60x + 100y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy$$

Supondo que toda a produção da indústria seja vendida, determinar a produção que maximiza o lucro e também, esse lucro.

<u>Solução:</u>

a) Derivadas Parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 60 - 3x - y \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 100 - 3y - x.$$

b) Pontos Críticos: $x = 10$ e $y = 30$.

c) Têm-se que:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8$$

$$H(10;30) = 8 > 0 \; e \; \frac{\partial^2 L}{\partial x}(10;30) = -3 < 0$$

Logo, produção diária que maximiza o lucro da indústria é de 10 unidades do produto A e 30 unidades do produto B. Para determinar o lucro máximo, basta calcular a função lucro no ponto (10,30) .

$$\mathrm{L}(10;30) = 60.10 + 100.30 - \frac{3}{2}.10^2 - \frac{3}{2}.30^2 - 10.30 = 1800$$

Portanto, o lucro máximo é 1800 u.m por dia.

CONCLUSÃO:

Foi visto que os problemas de otimização são resultados obtidos pela aplicação do conceito de pontos críticos de uma função. Estes pontos são candidatos a pontos de máximos e mínimos destas funções. Através desse estudo, pôde-se conhecer problemas que em algumas situações são mais próximos da realidade, acrescentando conhecimentos além daquilo que é ensinado no curso de Gestão de Empresas, lembrando que durante a graduação são vistos somente problemas mais simples envolvendo somente funções dependentes de uma única variável.

BIBLIOGRAFIA:

1. *J. Stewart, Cálculo, 5ª ed., vol. II, São Paulo: Thomson, 2006; L. Leithold, Matemática aplicada à Economia e Administração, São Paulo: Harbra, 2001.*

2. A. O. Maronese, "Máximos e Mínimos em Funções de Várias Variáveis: Uma Aplicação da Fórmula de Taylor, com Análise de Autovalores da Matriz Hesiana," Campinas, 2003.