INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA ALGÉBRICA
IMECC

Autor: Hugo Kooki Kasuya Rosado
Orientador: Rafael de Freitas Leão
Agência: PICME e CNPQ
Palavras-Chave: Topologia - Topologia Algébrica - Grupo Fundamental

Resumo

Neste trabalho desenvolveremos conceitos básicos de topologia algébrica, em particular o grupo fundamental. Para tando, inicialmente mostraremos alguns conceitos de topologia de conjuntos, como por exemplo, continuidade e conexidade. Todos estes conceitos culminam com a definição de homotopia de funções que, diretamente, induz uma definição de grupo fundamental de um espaço topológico. Posteriormente trabalharemos com alguns exemplos afim de ganhar familiaridade e intuição com o conceito de grupo fundamental.

Continuidade

O objetivo principal da Topologia é o estudo das propriedades de espaços abstratos que são invariantes via deformações contínuas. Mais importante ainda é o conceito de homeomorfismo: dois espaços X e Y são topologicamente equivalentes (ou homeomorfos) se existir uma função contínua bijetora com inversa também contínua. Sendo assim devemos rapidamente conceituar algumas ideias sobre continuidade.

Definição Uma **topologia** de um conjunto X é uma família $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

a) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathscr{T}$;

b) A união de elementos de qualquer subfamília de $\mathscr{T}$ pertence a $\mathscr{T}$;

c) A intersecção de elementos de qualquer subfamília finita de $\mathscr{T}$ pertence a $\mathscr{T}$.

Um conjunto X munido de uma topologia $\mathscr{T}$ é dito **espaço topológico**.

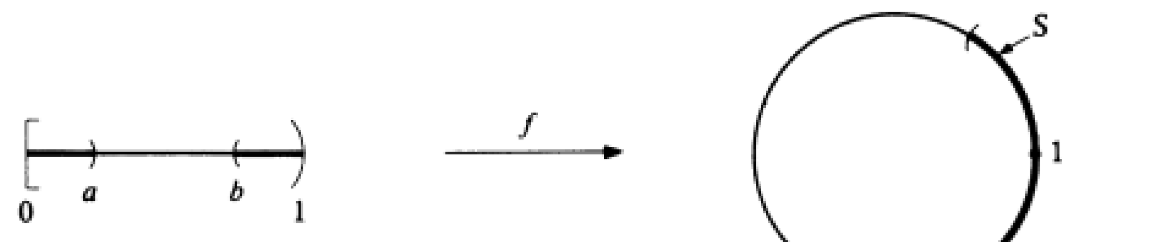
Se X for um espaço topológico com a topologia $\mathscr{T}$, dizemos que o subconjunto U de X é um conjunto aberto de X se U pertence à coleção $\mathscr{T}$.

Definição Uma função $f : X \to Y$ é dita **contínua** se para topo subconjunto aberto (fechado) V de Y, o conjunto $f^{-1}(V)$ for aberto (fechado) em X.

Definição Uma função $f : X \to Y$ é um **homeomorfismo** se ela é injetora, sobrejetora, contínua e possui inversa contínua. Quando tal função existe, dizemos que X e Y são homeomorfos.

Atente para o fato de que para dois espaços serem homeomorfos não é suficiente que haja uma bijeção entre elas. Observe o seguinte contra-exemplo.

Exemplo Mostraremos agora um exemplo de função contínua e bijetora mas cuja inversa não é contínua.
Seja S^1 a circunferência unitário no plano complexo, com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{C}$, e seja o intervalo $[0,1)$ com a topologia induzida pela topologia usual da reta real. Defina a função $f : [0,1) \to S^1$ por $f(x) = e^{2\pi i x}$. É fácil observar que f é bijetora e contínua.



Porém a sua inversa não é contínua. Para verificarmos tal fato precisamos apenas achar um conjunto aberto O de [0,1) tal que $(f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$ não é um aberto em S^1. Pegue então o intervalo $[0, \frac{1}{2})$, que é um aberto em [0,1), mas sua imagem pela função f consiste dos números $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 \leq arg z < \pi$, que não é aberto em S^1. □

Proposição A composição de duas funções contínuas é uma função contínua.

Conexidade

A conexidade é uma das invariantes mais básicas na área de topologia. Esta propriedade tenta, intuitivamente, caracterizar se um determinado espaço pode ser particionado em conjuntos abertos, ou "partes", disjuntos.

Definição Um espaço X é dito ser conexo se para qualquer decomposição em união de dois subconjuntos não vazios A ∪ B a intersecção $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ ou $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

A definição de conexidade pode ser formulado de outras formas:

Teorema As seguintes condições em um espaço X são equivalentes:

a) X é conexo;

b) Os únicos subconjuntos de X que são ambos abertos e fechados são o X e o $\emptyset$;

c) X não pode ser expresso pela união de dois conjuntos abertos disjuntos;

d) Não existe função contínua de X para um espaço discreto que contém mais do que um ponto.

Teorema A imagem por função contínua de um espaço conexo é conexo.

Demonstração: *Seja f:X → Y uma função contínua sobrejetora e suponha que X é conexo. Se A ⊆ Y no qual é simultaneamente aberto e fechado, então $f^{-1}(A)$ é aberto e fechado em X. Como X é conexo, $f^{-1}(A)$ tem que ser todo o espaço X ou o conjunto vazio segundo o item (b) do teorema (). Logo A é igual Y ou ao conjunto vazio. Logo Y é conexo.* □

Teorema Seja X um espaço topológico e Z um subconjunto de Z. Se Z é conexo e é denso em X, então X ;e conexo.

Corolário Se Z é um subconjunto conexo de um espaço topológico X, e se Z $\subseteq Y \subseteq \bar{Z}$, então Y é conexo. Em particular, o fecho $\bar{Z}$ de Z é conexo.

Definição um **caminho** em um espaço topológico X é uma função contínua $\gamma : [0,1] \to X$. Os pontos $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ são chamados de ponto **inicial** e ponto **final** do caminho respectivamente, e γ é dito **ligar** $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$. Definimos o caminho oposto que liga $\gamma(1)$ a $\gamma(0)$ por $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, 0 ≤ t ≤ 1.

Definição Um espaço é dito ser **conexo por caminhos** se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um caminho.

Corolário Se X e Y espaços topológicos homeomorfos e X é conexo por caminhos, então Y também é conexo por caminhos.

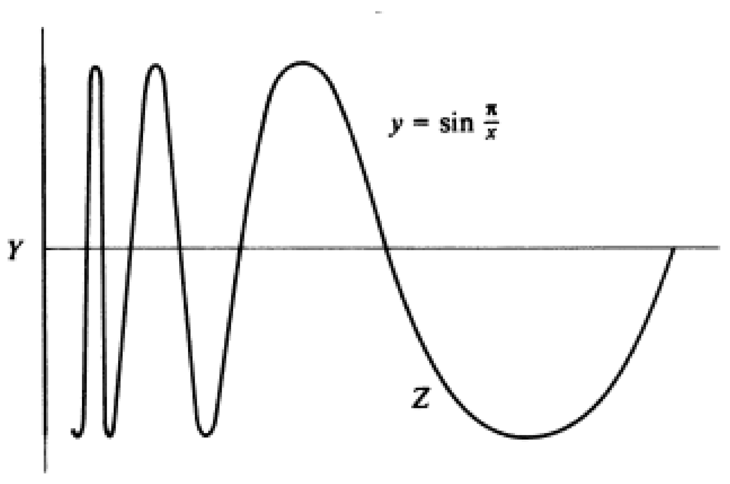
Teorema Um espaço conexo por caminhos é conexo.

Observe no seguinte exemplo que a recíproca pode não ser verdadeira.

Exemplo Defina os conjuntos

$Y = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq y \leq 1\}$

$Z = \{(x, sen\frac{\pi}{x}) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq 1\}$



e o conjunto $X = Y \cup Z$. Mostraremos que X é conexo mas não é conexo por caminhos. É fácil verificar que Z é um espaço conexo por caminhos pois é a imagem de (0,1] por uma função contínua e que X é o fecho de Z em $\mathbb{R}^2$, logo X é conexo. Apesar disso, mostraremos que é impossível ligar um ponto de Y a um ponto de Z por um caminho em X. Seja $y \in Y$ e $\gamma : [0,1] \to X$ um caminho que começa em y. Como Y é fechado em $\mathbb{R}^2$, ele é um subconjunto fechado em X, logo $\gamma^{-1}(Y)$ é fechado em [0,1] e com certeza não é vazio. Suponha que $t \in \gamma^{-1}(Y)$ e e escolha $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente de forma que $\gamma((t-\varepsilon, t+\varepsilon))$ esteja contido no disco fechado D de centro $\gamma(t)$ e raio $\frac{1}{2}$. A intersecção deste disco com o nosso espaço X consiste no intervalo fechado sobre o eixo y juntamente com segmentos da curva y = sen$\frac{\pi}{x}$, sendo cada um homeomorfo a um intervalo fechado (observe que quaisquer dois desses seguimentos são separados em $D \cap X$). Logo $D \cap Y$ é uma componente conexa de $D \cap X$. Como $\gamma(t) \in D \cap Y$ e $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ é conexo, temos que todo o $\gamma(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ está contido em $D \cap Y$. Então $\gamma^{-1}(Y)$ é aberto, fechado e não vazio em [0,1], logo $\gamma([0,1]) \subseteq Y$, pois [0,1] é conexo. □

Homotopia

Em topologia, é importante sabermos se um espaço pode ser continuamente deformado em uma outra, este conceito é conhecido por homotopia. Para apresentarmos a principal ideia deste cartaz, o Grupo Fundamental, é preciso que apresentemos um caso mais específico de homotopia, a Homotopia de caminhos.

Definição Seja X um espaço e $\alpha : I \to X$ um mapa. Então α é um **laço** se $\alpha(0) = \alpha(1)$ e dizemos que o laço está **baseado** no ponto $\alpha(0)$.

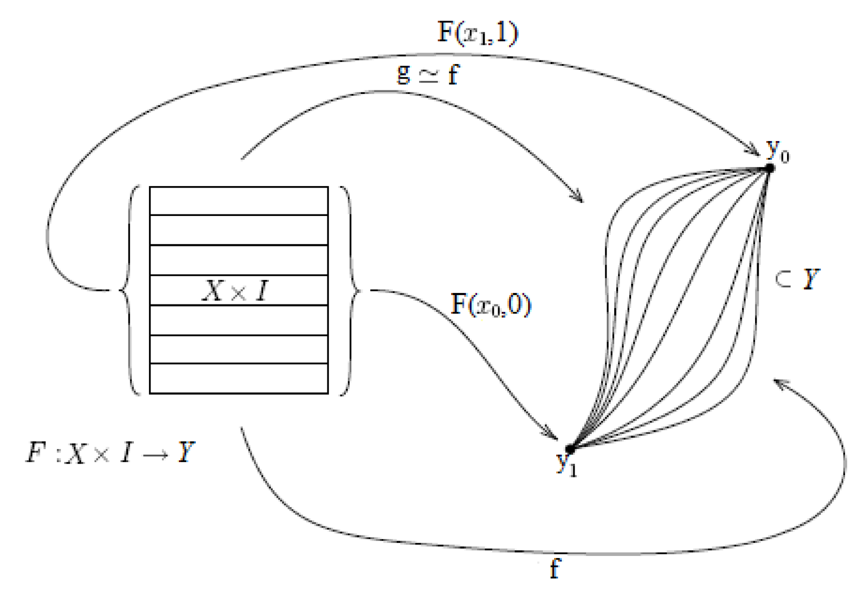
Definição Se α e β são dois laços baseados em um mesmo ponto de X, definimos o produto $\alpha \bullet \beta$ sendo o seguinte laço:

$$\alpha \bullet \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Definição Seja $f, g : X \to Y$ mapas. Então f é **homotópico** a g se existe um mapa $F : X \times I \to Y$ tal que F(x, 0) = f(x) e F(x, 1) = g(x) ∀ x ∈ X. O mapa F é chamado de **homotopia** de f em g e denotaremos por f $\underset{F}{\simeq}$ g. Além disso, se f e g se coincidem em algum subconjunto A de X, podemos deformar f em g sem alterar os valores de f em A. Neste caso definimos a homotopia F de f em g com a propriedade:

F(a, t) = f(a), $\forall a \in A$, $\forall t \in I$.

Quando tal homotopia existe dizemos que f é homotópica a g em relação a A e denotamos por f $\underset{F}{\simeq}$ g rel A. Em particular, se f e g forem laços, $\{f(0), f(1)\} \subseteq A$.



Lema A relação de homotopia é uma relação de equivalência no conjunto de mapas de X em Y.

Lema Sejam $f, g : X \to Y$ duas funções homotópicas, $h : Y \to Z$ e $k : W \to X$ duas funções contínuas, então h∘f $\underset{hF}{\simeq}$ h∘g e f∘k $\underset{F}{\simeq}$ g∘k rel $f^{-1}(B)$ via homotopia F(x, t) = G(k(x), t).

Demonstração: *Note que se os mapas*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

e se $f \underset{F}{\simeq} g$ rel A, então h∘f $\underset{hF}{\simeq}$ h∘g rel A como mapas de X em Z.
E dado os mapas

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

com g $\underset{G}{\simeq}$ h rel B para algum subconjunto B de Y, então g∘f $\underset{F}{\simeq}$ h∘f rel $f^{-1}(B)$ via homotopia F(x, t) = G(f(x), t). □

Grupo Fundamental

O Grupo Fundamental acarreta algumas propriedades importantes de um espaço topológico, como informações de seus buracos e de seu formato. Ele é importante pois é um invariante topológico, ou seja, dois espaços homeomorfos possuem o mesmo grupo fundamental. Para estudarmos tal propriedade de um espaço, iremos inserir essa estrutura de grupo através de seus laços homotópicos.

Definição Seja X um espaço topológico e considere o conjunto de todos os laços baseados em um ponto p ∈ X. Como visto na seção passada, a relação de homotopia relativa a {0,1} é uma relação de equivalência nesse conjunto. Vamos nos referir a essa classe de equivalência por **classe de homotopia**, e denotaremos por $\langle\alpha\rangle$ a classe de homotopia de α.

Definição A multiplicação de laços induz uma multiplicação de classes de homotopia via

$\langle\alpha\rangle \bullet \langle\beta\rangle = \langle\alpha \bullet \beta\rangle$

É fácil verificar que esse produto é bem definido.

Teorema O conjunto das classes de homotopia dos laços em X baseados em p formam um grupo sob o produto $\langle\alpha\rangle \bullet \langle\beta\rangle = \langle\alpha \bullet \beta\rangle$. Esse grupo é conhecido como o **grupo fundamental** de X baseado em p, e é denotado por $\pi_1(X, p)$.

Teorema X conexo por caminhos $\Rightarrow \pi_1(X, p) \simeq \pi_1(X, q)$.

Então se X é conexo por caminhos o grupo fundamental $\pi_1(X, p)$ independe da escolha do ponto base p devido ao isomorfismo. Neste caso é comum abreviarmos $\pi_1(X, p)$ por $\pi_1(X)$.

Definição Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e p um ponto base em X e q = f(p) um ponto base em Y. Para todo laço α baseado no ponto p em X, a função composta $f \circ \alpha$ é um laço baseado no ponto q em Y. Como a composição de laços homotópicos com f gera laços homotópicos em Y (lema ()), podemos definir a função

$f_* : \pi(X, p) \to \pi_1(Y, q)$

por $f_*(\langle\alpha\rangle) = \langle f \circ \alpha\rangle$. Como $f \circ (\alpha \bullet \beta) = (f \circ \alpha) \bullet (f \circ \beta)$, temos que f_* é um homomorfismo. Dizemos que f_* é **induzido** por f.

Corolário Se X e Y são espaços topológicos conexos por caminhos e $f : X \to Y$ é um homeomorfismo então $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X)$. Então se X e Y são espaços topológicos conexos que possuem grupos fundamentais π_1 diferentes então X não é homeomorfo a Y.

Exemplo O grupo fundamental de um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ é o grupo trivial.

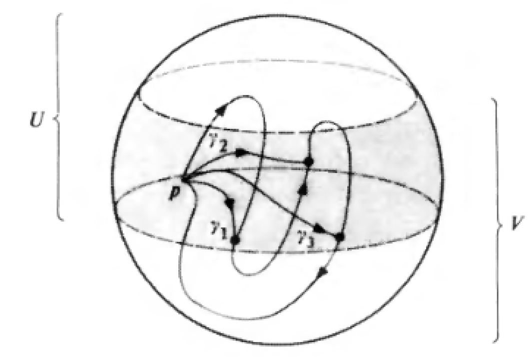
Exemplo O grupo fundamental da circunferência S^1, onde cada elemento do grupo é dado pelas classes de caminhos relativos ao número de voltas sobre S^1, é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Corolário Uma circunferência não é homeomorfo ao intervalo [0,1), pois o grupo fundamental desses dois espaços são diferentes.

Teorema Seja X um espaço que pode ser escrito como união de dois conjuntos abertos simplesmente conexos U, V de modo que $U \cap V$ seja conexo por caminhos. Então X é simplesmente conexo.

Demonstração: *Escolha um ponto base $p \in U \cap V$, e seja $\alpha : I \to X$ um laço baseado em p. Usando o lemma de Lebesgue, podes achar pontos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ em I de forma que $\alpha(t_{k-1}, t_k)$ está sempre contido em U ou V. Denote por α_k para o caminho $s \mapsto \alpha((t_k - t_{k-1})s + t_{k-1})$, $0 \leq s \leq 1$. Ligue p a cada ponto $\alpha(t_k), 1 \leq k \leq n-1$ por um caminho γ_k que está contido em U, se $\alpha(t_k) \in U$, e que está contido em V se $\alpha(t_k)$ inV. No caso de $\alpha(t_k) \in U \cap V$ devemos achar um γ_k em $U \cap V$ (que existe pois $U \cap V$ é conexo por caminhos). O laço α é homotópico ao produto*

$$(\alpha_1 \bullet \gamma_1^{-1}) \bullet (\gamma_1 \bullet \alpha_2 \bullet \gamma_2^{-1}) \bullet (\gamma_2 \bullet \alpha_3 \bullet \gamma_3^{-1}) \bullet \ldots \bullet (\gamma_{n-1} \bullet \alpha_n)$$



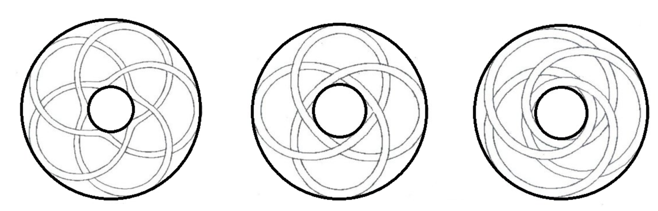
onde cada membro é um laço contido em U ou V. □

Corolário A n-esfera (S^n) possui grupo fundamental trivial para $n \geq 2$.

Demonstração: *Escolha dois pontos distintos $x, y \in S^n$ e seja $U = S^n - x$, $V = S^n - y$. Ambos U e V são homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, logo são simplesmente conexos, e $U \cap V$ é conexo por caminhos se $n \geq 2$. Logo S^n é simplesmente conexo, i.e., possui grupo fundamental trivial.* □

Proposição Se X e Y são espaços conexos por caminho $\pi_1(X \times Y)$ é isomorfo a $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Exemplo O espaço $S^1 \times S^1$, conhecido como **toro**, possui grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Exemplos de laços (5,3), (4,3) e (3,4) do toro, respectivamente, são mostrados abaixo:



O Grupo Fundamental é de extrema importância para a análise de espaços topológicos, mas calcular esta invariante não é o suficiente para classificarmos espaços homeomorfos. Para finalizar esta apresentação mostraremos um exemplo de dois espaços topológicos com o mesmo grupo fundamental mas que não são homeomorfos.

Exemplo Afirmamos que a circunferência S^1 e o cilindro $S^1 \times I$ não são homeomorfos, como é de se esperar, mas os grupos fundamentais desses respectivos espaços são ambos isomorfos a $\mathbb{Z}$.

Referências

[1] Armstrong, M.A. *Basic Topology*, Springer, 1983.

[2] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2nd ed., 2000.

[3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.