TEORIA DE REPRESENTAÇÕES DE QUIVERS

Aluno: Bianca Fujita Castilho
bianca fujita@hotmail.com

Orientador: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim
jardim@ime.unicamp.br

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Apoio:CNPq

Palavras-Chave: Quivers - Representações - Álgebra Linear.

Introdução

Apresentaremos alguns conceitos básicos relacionados a quivers e suas representações, com o objetivo de classificar os chamados quivers hiperbólicos. Como exemplo, discutimos como estes conceitos podem ser úteis em um problema de Álgebra Linear.

Estudo

Definição 1 *Um **quiver** Q é um par (Q_0, Q_1), onde Q_0 e Q_1 são conjuntos ditos, respectivamente, o conjunto de vértices e o conjunto de flechas de Q, ambos de cardinalidade finita, de tal forma que existem mapas $h, t : Q_1 \to Q_0$, chamados de head e tail (nesta ordem), onde dada uma flecha $a \in Q_1$ dizemos que esta começa em q_0 e termina em q_1, com $q_0, q_1 \in Q_0$, quando $t(a) = q_0$ e $h(a) = q_1$.*

Exemplo 1

$$1\bullet \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} \bullet 2$$

Neste caso note que o quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ é representado acima, onde $Q_0 = \{1, 2\}$ e $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, aqui temos que $h(\alpha_1) = t(\alpha_2) = 2$ e $t(\alpha_1) = h(\alpha_2) = 1$

Definição 2 *Definimos como laço em Q, uma flecha $a \in Q_1$ tal que $t(a) = h(a)$, ou seja, uma flecha que começa e termina no mesmo vértice.*

Definição 3 *Dado um corpo k, uma representação $V = (V_i, \phi_\alpha)$ de um quiver Q sobre o corpo k é uma coleção de k espaços vetoriais $\{V_i | i \in Q_0\}$ com uma coleção $\{\phi_\alpha : V_{t(\alpha)} \to V_{h(\alpha)} | \alpha \in Q_1\}$ de mapas lineares (sobre k), esta será denotada por V. O conjunto das representações de um Q sobre um corpo k será denotado por $Rep(Q, k)$.*

Atentamos aqui ao fato de que podemos associar a cada vértice um espaço vetorial e a cada flecha uma transformação linear que tem como domínio o espaço onde a flecha se inicia ($t(a) \in Q_0$) e como imagem seu final ($h(a) \in Q_0$).

Definição 4 *Dada uma representação $V = (V_i, \phi)$, $W = (W_i, \psi)$ é uma subrepresentação se*

1. W_i é um subespaço vetorial de V_i para todo $i \in Q_0$

2. $\phi_{\alpha|W_{t(\alpha)}} = \psi_\alpha$, para todo $\alpha \in Q_1$

Definição 5 *Se V e W são duas representações do quiver Q, então dizemos que a representação soma direta de V e W, denotada por $X = V \oplus W$ é dada por:*

- *$X_i = V_i \oplus W_i$, para todo $i \in Q_0$*
- *$X_\alpha(v, w) = (V_\alpha(v), W_\alpha(w))$, para todo $\alpha \in Q_1$, $v \in V_{t(\alpha)}$ e $w \in W_{t(\alpha)}$*

Definição 6 *Dada uma representação V de Q, o vetor $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ dado por $\alpha_i = dimV_i, i \in Q_0$ é chamado de vetor dimensão da representação.*

Definição 7 *Dizemos que uma representação V de um quiver Q é decomponível quando é isomorfa à soma direta de duas de suas subrepresentações. Caso contrário, ela é denominada indecomponível.*

Teorema 1 *Toda representação pode ser escrita como soma direta de representações indecomponíveis. Essa decomposição é única a menos de isomorfismo.*

Definição 8 *Seja $A = (a_{ij})_{nxn}$ uma matriz. Dizemos que A é uma matriz de Cartan generalizada (MCG) se:*

1. $a_{ii} = 2$;

2. $a_{ij} \in \mathbb{Z}_-$ e $i \neq j$;

3. $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$; se satisfizer, além das três acima, a seguinte condição:

4. $a_{ij}a_{ji} \leq 3$, $i \neq j$.

dizemos que é uma Matriz de Cartan.

Vamos construir uma MCG a partir de um quiver Q sem laços, com n vértices, isto é, $\#Q_0 = n$

Note que essa forma independe da orientação das flechas, uma consequência direta do fato de que a forma de Cartan é simétrica.

Definição 9 *Em $\mathbb{Z}^n$ definimos a forma de Euler da seguinte maneira:*

$$<\alpha, \beta> = \sum_{i \in Q_0} \alpha_i \beta_i - \sum_{a \in Q_1} \alpha_{t(a)} \beta_{h(a)}$$

sua forma matricial $E = (a_{ij})$ é dada por

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \#\{a \in Q_1 | t(a) = i, h(a) = j\}.$$

Definimos agora a forma de Tits como sendo

$$q(\alpha) = <\alpha, \alpha>$$

Exemplo 2 *Considere o seguinte quiver:*

$$1\bullet \equiv 2\bullet - 3\bullet$$

A matriz de Cartan generalizada associada é:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma de Tits:

$$q(x) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 3x_1x_2 - x_2x_3$$

Definição 10 *Um forma quadrática $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ é dita:*

1. fracamente positiva definida se para todo $x \in \mathbb{Z}^n_+$, $q(x) > 0$

2. fracamente positiva semidefinida se para todo $x \in \mathbb{Z}^n_+$, $q(x) \geq 0$

3. indefinida se $\exists\, x \in \mathbb{Z}^n_+$ tal que $q(x) \leqslant 0$

Podemos definir a forma bilinear da mesma maneira, seguindo o tipo da forma quadrática associada a ela.

Definição 11 *Dado um quiver Q, associamos um grafo Γ, que é dado pelos mesmos vértices de Q e as arestas são as flechas sem a orientação.*

Definição 12 *O grafo Γ é do tipo $finito$, $manso$ ou $selvagem$ se a forma bilinear associada a Q for fracamente positiva definida, semidefinida ou indefinida, respectivamente.*

Teorema 2 *Seja Γ um grafo conexo.*

- *Γ é um diagrama de Dynkin do tipo ADE se, e só se a forma bilinear associada for fracamente positiva definida.*
- *Γ é um diagrama Euclideano se, e somente se, a mesma é positiva definida.*

Definição 13 *Um subgrafo Γ' de Γ é o par (Γ'_0, Γ'_1) tal que $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$ e Γ'_1 é o conjunto de arestas de Γ que não são ligadas a vértices de $\Gamma_0 | \Gamma'_0$. Visto de outra maneira, os vértices do subgrafo estão contidos no conjunto de vértices de Γ e as arestas também estão contidas no conjunto de arestas de Γ, mas com a restrição de que só podem estar ligadas a vértices do subgrafo. Isto é, ao removermos um vértice, removemos, com ele, todas as arestas a ele ligadas.*

Definição 14 *Um grafo Γ é dito hiperbólico se:*

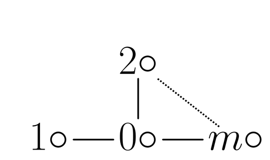
- *é selvagem;*
- *todo subgrafo conexo ($\Gamma' \neq \Gamma$) é do tipo Dynkin do tipo ADE ou Euclideano.*

Teorema 3 *Seja Q um quiver cujo grafo associado Γ é conexo, Dynkin do tipo ADE, Euclideano ou hiperbólico, se $\alpha \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ é tal que $q(\alpha) = <\alpha, \alpha> \leq 1$, então existe representação indecomponível com vetor dimensão α.*

Aplicações

Vários problemas em Álgebra Linear são resolvidos a partir da teoria de representações de quivers que se resume ao estudo das representaões indecomponíveis do quiver, sabendo que a decomposição de uma representação numa soma direta de representações indecomponíveis é única a menos de isomorfismo.

Exemplo 3 *V_m contém m vértices e m arestas conectados da seguinte maneira:*



Observamos que para $m = 1, 2, 3$, V_m é do tipo finito, para $m = 4$ ele é do tipo manso e para $m = 5$ ele é hiperbólico. Colocando em V_m todas as flechas apontando para o vértice 0, para encontrar as representações indecomponíveis, basta classificar as $m - uplas$ de subespaços em um espaço vetorial V a menos de isomorfismo. De fato, devemos observar que, sendo $f_i : V_i \to V$: a representação é indecomponível $\Rightarrow f_1, \cdots, f_m$ são injetivas.
Pela contrapositiva, temos que se existe uma f_j não injetiva então a representação não pode ser indecomponível. Ora, se a aplicação não é injetiva, o subespaço $Kerf$ é diferente de $\{0\}$, então poderíamos decompor nosso espaço V_j da seguinte maneira: $V_j = V'_j \oplus Kerf$, como a restrição de f_j ao $kerf$ pode ser tomada como uma ϕ_j, a coleção das duplas (V_i, f_i) com $i \neq j$ e $(kerf, \phi_j)$ caracteriza uma subrepresentação não trivial, mostrando que neste caso a representação não pode ser indecomponível. Assim sendo, como cada f_i é injetivo e sobrejetivo sobre a imagem de V_i e $ImagV_i \subset V$, criamos um subespaço de V que é isomorfo ao V_i. Da onde concluímos que classificando os subespaços de V, conseguimos as representações indecomponíveis.

Apresentamos a tabela dos quivers hiperbólicos, cuja classificação fez parte do estudo.

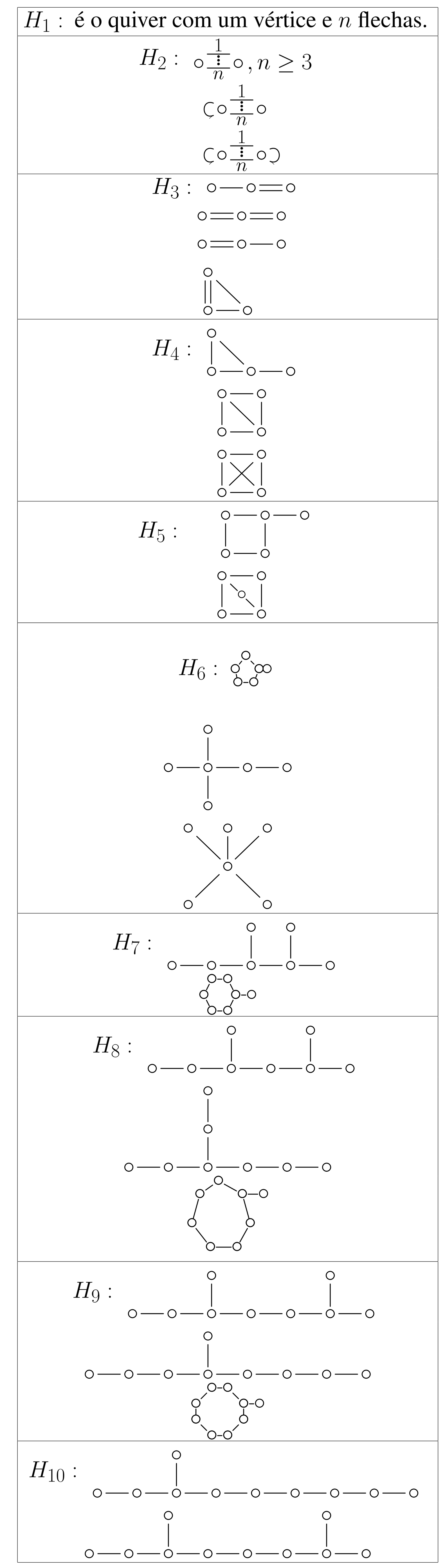


Tabela 1: Diagramas Hiperbolicos.

Conclusão

Quivers se fazem interessantes pois as ferramentas desenvolvidas para seu estudo podem ser aplicadas a problemas relacionados, a por exemplo, Álgebra Linear.

Referências

[1] D. M. Prata. *Representações Torcidas de Quivers*. Dissert. Mestr. IMECC-UNICAMP (2008).

[2] Victor G. Kac. *Root systems, representations of quivers and invariant theory*. Springer - Verlag, 1994.

[3] V. M. F. da Silva. *Sistemas de Raízes e Representações de Quivers*. Dissert. Mestr. IMECC-UNICAMP (2009).