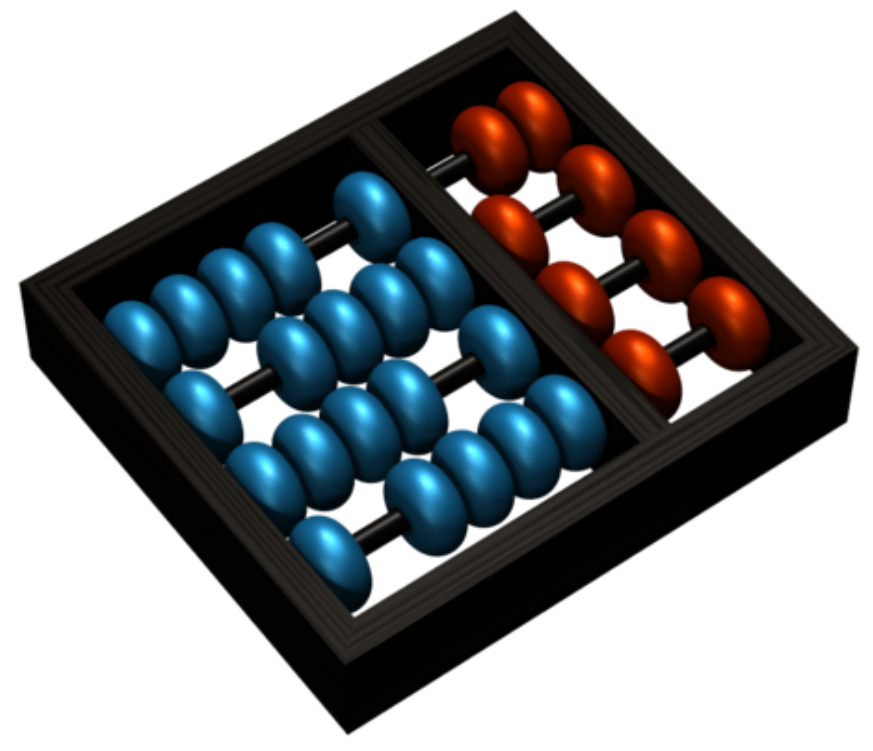


# ALGORITMOS LAGRANGIANOS PARA O PROBLEMA DA ÁRVORE GERADORA DE DILATAÇÃO MÍNIMA EM UM GRAFO GEOMÉTRICO



Autor: Aléx Fernando Brandt (lexbrandt@gmail.com)

Co-autor: Miguel F. A. de Mattos Gaiowski (miggaowski@gmail.com)

Orientador: Cid Carvalho de Souza (cid@ic.unicamp.br)

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO – IC FAPESP

Palavras-chave: Otimização combinatória – Dilatação mínima – Relaxação lagrangiana

## INTRODUÇÃO

Seja  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  um conjunto de pontos no plano. Define-se o *grafo geométrico*  $G(P) = (V, E)$  associado a  $P$  como sendo o grafo não-direcionado ponderado completo de  $n$  vértices cujo peso de uma aresta  $(i, j)$  corresponde à distância euclidiana  $d_{ij}$  entre os pontos  $p_i$  e  $p_j$ .

Dada uma árvore geradora  $T = (V, E')$  de  $G(P)$ , denota-se por  $\pi_T(u, v)$  o comprimento do caminho (mínimo) entre esses vértices em  $T$ . De maneira usual, considera-se que aqui o comprimento de um caminho é dado pela soma dos pesos das arestas do caminho. A partir das definições acima, a *dilatação*  $\rho$  de  $u, v$  em  $T$  é definida como sendo:

$$\rho_T(u, v) = \frac{\pi_T(u, v)}{d_{uv}}$$

Já a dilatação de  $T$  é dada por:

$$\rho(T) = \max_{\substack{u, v \in V \\ u \neq v}} \rho_T(u, v)$$

O Problema da Árvore Geradora de Dilatação Mínima em Grafos Geométricos (PAGDMGG) consiste em encontrar uma árvore geradora  $T$  de  $G(P)$  cuja dilatação seja mínima.

Este problema pertence a classe  $\mathcal{NP}$ -difícil[1] e aparece em situações práticas de projeto de redes com boa qualidade de conexão e baixo custo [2].

## METODOLOGIA

Sendo  $\mathcal{NP}$ -difícil, não é provável que se possa obter um algoritmo eficiente (i.e., com complexidade polinomial em  $n$ ) que resolva o PAGDMGG de forma exata.

Com o objetivo de encontrar dados que permitissem avaliar a qualidade de soluções para as quais não há garantia de qualidade (fornecidas por métodos heurísticos, por exemplo) foram utilizadas as técnicas de Programação Linear Inteira (PLI) e Relaxação Lagrangiana (RL) associadas a rotinas de pré-processamento.

O modelo de PLI apresentado e desenvolvido neste projeto foi utilizado para obtenção de soluções ótimas com o resolvidor CPLEX® e de limitantes duais por meio da Relaxação Lagrangiana (método dos subgradientes) implementada pelo aluno.

As rotinas de pré-processamento, desenvolvidas juntamente com o aluno Miguel, tentam reduzir o problema fixando em zero o valor de variáveis correspondentes a arestas que não pode fazer parte de qualquer solução ótima dado um limitante primal. O impacto destas rotinas é analisado nos resultados.

## MODELO

Da ideia de construção de uma árvore a partir da junção de caminhos entre todos os pares de vértices obtém-se o modelo a seguir.

$$\min z = \rho \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V\{a\}} x_{ia}^{ab} - \sum_{i \in V\{a\}} x_{ai}^{ab} = -1 \quad \forall a, b \in V \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V\{j\}} x_{ij}^{ab} - \sum_{i \in V\{j\}} x_{ji}^{ab} = 0 \quad \forall j \in V\{a, b\}, \forall a, b \in V \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V\{b\}} x_{ib}^{ab} - \sum_{i \in V\{b\}} x_{bi}^{ab} = 1 \quad \forall a, b \in V \quad (4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \frac{d_{ij}}{d_{ab}} x_{ij}^{ab} - \rho \leq 0 \quad \forall a, b \in V \quad (5)$$

$$x_{ij}^{ab} - y_{\{ij\}} \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall a, b \in V \quad (6)$$

$$\sum_{\{i,j\} \in E} y_{\{ij\}} = |V| - 1 \quad (7)$$

$$x \in \mathbb{B}^{|A|*|E|} \quad (8)$$

$$y \in \mathbb{B}^{|E|} \quad (9)$$

Onde  $V\{a\} = V \setminus \{a\}$ ,  $x_{ij}^{ab}$  representa o fluxo no arco que liga os vértices  $i, j \in V$  no caminho entre  $a$  e  $b$  e  $y$  é o vetor das variáveis  $y_{\{ij\}}$  definidas para todas as arestas  $\{i, j\} \in E$ , com valor 1 se  $\{i, j\}$  pertence a solução e 0 caso contrário.

## RELAXAÇÃO

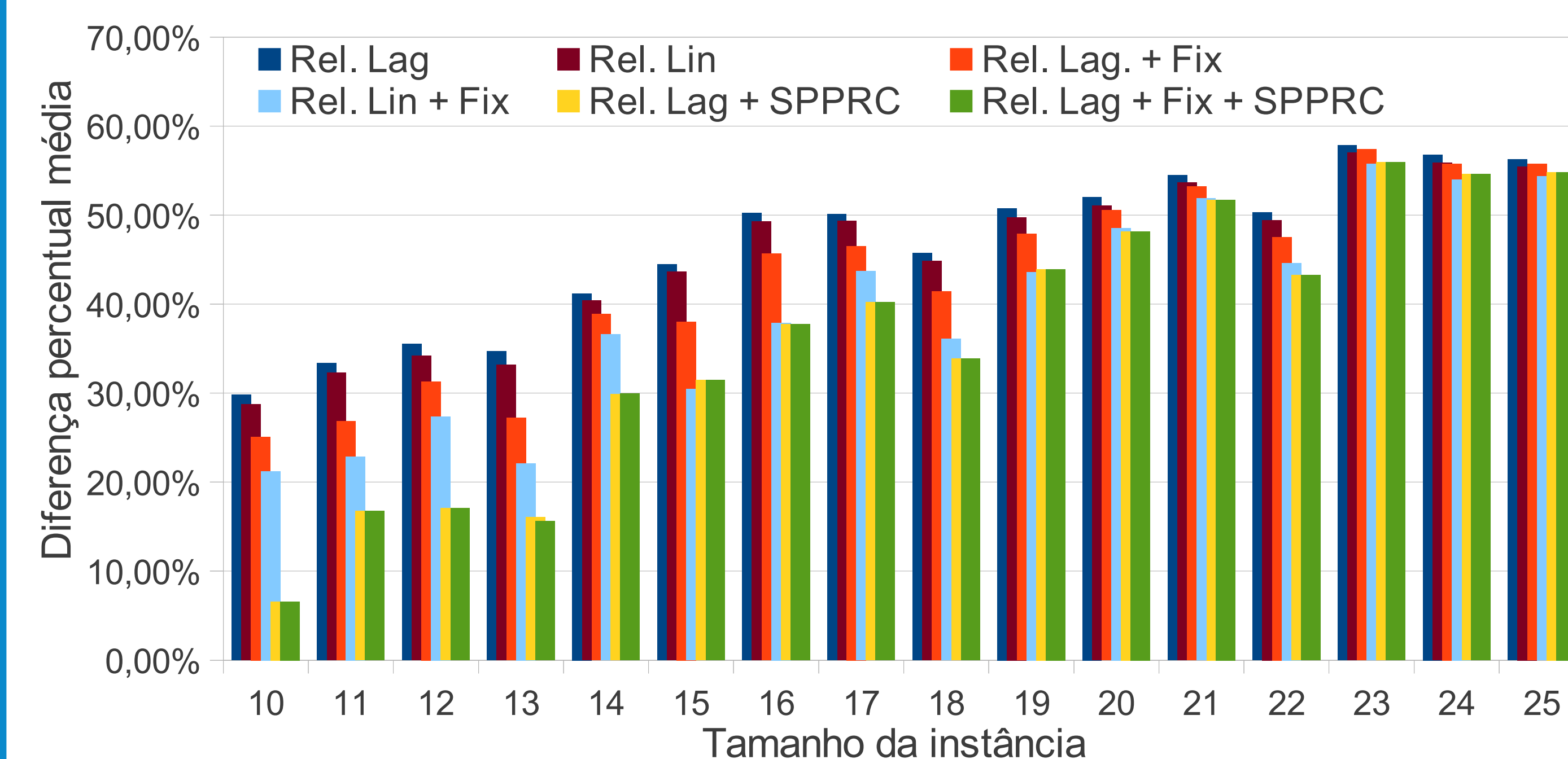
A Relaxação Lagrangiana é obtida pela dualização das restrições (6), ou seja, tais restrições são somadas à função objetivo multiplicadas por fatores não-negativos denominados multiplicadores de Lagrange.

O problema resultante desta operação, denominado Primal Lagrangiano, consiste em um problema da árvore geradora máxima e  $\frac{n(n-1)}{2}$  problemas de caminhos mínimos. Desta forma a relaxação possui a propriedade de integralidade e seu valor é menor ou igual ao da relaxação linear. Este fato possibilitou usar o valor da relaxação linear para guiar o ajuste dos parâmetros do método dos subgradientes.

Atingido o limite teórico da relaxação (com pequena folga) notou-se que a diferença entre os limitantes primal e dual ainda era grande e insuficiente para avaliar a qualidade de outras soluções. Novas restrições do tipo mochila foram adicionadas ao Primal Lagrangiano a partir de um limitante primal e das restrições (5) em busca de limitantes mais apertados. Estas inequações (10) causam a perda da propriedade de integralidade adicionando restrições de orçamento ao problema do caminho mínimo (SPPRC).

$$\sum_{(i,j) \in A} \lfloor d_{ij} \rfloor x_{ij}^{ab} \leq \lfloor d_{ab} \bar{\rho} \rfloor, \quad \forall a, b \in V. \quad (10)$$

## RESULTADOS



Nota-se que a Rel. Lag. ficou próxima de atingir o valor da Rel. Lin., porém a dificuldade em encontrar bons parâmetros, dificultou tal aproximação para a relaxação com fixação. Nota-se, ainda, que a adição das restrições de mochila proporcionou melhora no valor do limitante para uma parcela significativa das instâncias.

O algoritmo exato provou a otimalidade de uma solução para 36,8% das instâncias e elevou este valor para 46,8% quando as rotinas de pré-processamento foram aplicadas (tempo limite de 30 min.).

Os testes foram realizados com 160 instâncias geradas pela distribuição uniforme de pontos no plano.

Seja  $LI$  e  $LS$  os valores de limitantes inferior e superior, respectivamente, para uma dada instância. O gráfico apresenta o valor médio da relação  $\frac{(LS-LI)}{LS} \times 100$  para cada tamanho de instância, com  $LS$  fornecido pela heurística GRASP desenvolvida pelo aluno Miguel e  $LI$  cada uma das configurações apresentadas na legenda.

## CONCLUSÃO

Apesar da qualidade dos limitantes encontrados ser inadequada para a avaliação de heurísticas primais, estes ficaram bem próximos aos seus limitantes teóricos. Os resultados mais promissores são os apresentados pelo algoritmo exato.

## REFERÊNCIAS

- [1] O. Cheong, H. Haverkort, and M. Lee. Computing a minimum-dilation spanning tree is np-hard. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 41(3):188–205, November 2008.
- [2] G. Narasimhan and M. Smid. *Geometric Spanner Networks*. Cambridge University Press, USA, 2007.