



Osciladores de Kuramoto: Interações de Ordem Superior em 2D

Gui Luz Buzanello
Universidade Estadual de Campinas
 (Bolsista PIBIC-CNPq)

Prof. Dr. Marcus A. M. de Aguiar
Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física “Gleb Wataghin”
Depto de Física da Matéria Condensada
 (Orientador)

I. INTRODUÇÃO

Ao se estudar o vasto campo dos sistemas dinâmicos, os efeitos de sincronização não passam despercebidos. Sua notável ubiquidade dentre sistemas complexos, desde sistemas de neurônios até enxames de insetos, tem atraído a atenção de cientistas para compreender os mecanismos, comportamentos dinâmicos e transições de fase associados a, sobretudo, sistemas de unidades oscilatórias, que são bem representados pelos exemplos de comportamento síncrono observados.

No interior deste campo de estudo, encontramos a paradigmática equação de Kuramoto, que descreve um sistema de osciladores, cada um com uma frequência natural escolhida de uma distribuição especificada, e cuja variação de fase com o tempo considera a contribuição de um termo de acoplamento, no qual figura um fator constante, escalar, associado à força da interação entre os osciladores. A análise de Kuramoto nos mostra que, para infinitos osciladores, a função que descreve a fração de osciladores que estão sincronizados em função da constante de acoplamento sofre uma transição de fase, que é uma característica amplamente reconhecida em fenômenos de sincronização reais.

Várias generalizações do modelo de Kuramoto, como modelos multi-dimensionais, já foram estudados. Uma publicação recente introduziu um estudo interessante acerca das interações de ordem superior, o que significa estender as interações par-a-par originais para acoplamentos de três e quatro corpos. A análise revela uma nova fase de biestabilidade, em que ambos comportamentos desordenado e síncrono são estáveis no equilíbrio.

Na linha de nossos trabalhos anteriores, nosso objetivo aqui é generalizar a dinâmica de modelos unidimensionais,

em sua descrição vetorial, de modo a ter matrizes no lugar de acoplamentos escalares. Uma parametrização conveniente destas matrizes de acoplamento constantes revela novas transições de fase para dinâmicas distintas e mais ricas no equilíbrio, chamadas de estados oscilatórios. O foco do nosso trabalho é, desta vez, o modelo de interações de ordem superior discutido por Skardal e Arenas, e como – e se – esses estados oscilatórios emergem em tal modelo no caso de acoplamentos matriciais.

A. Modelo de Kuramoto de Ordem Superior

O sistema de Kuramoto consiste de N osciladores, cada um possuindo uma fase interna representada pelo ângulo θ_i que roda com frequência natural ω_i [1]. Tipicamente, as frequências dos osciladores são sorteadas de uma distribuição $g(\omega)$. As equações dinâmicas que descrevem o caso de uma rede de conexões que considera as interações, todos com todos, entre trios e quadras de unidades oscilatórias é dada por [2]

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i = & \omega_i + \frac{K_2}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \\ & + \frac{K_3}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \sin(2\theta_j - \theta_l - \theta_i) \\ & + \frac{K_4}{N^3} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sin(\theta_j + \theta_l - \theta_m - \theta_i), \quad (1) \end{aligned}$$

onde ω_i são as frequências naturais de cada oscilador, selecionadas da distribuição $g(\omega)$, e K_2 , K_3 e K_4 são as

constantes de acoplamento para os termos de dois, três e quatro corpos, respectivamente.

Para estudar a sincronização entre os osciladores, definem-se os parâmetros de ordem [2]

$$z = re^{i\psi} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i}, \quad (2)$$

$$z_2 = p_2 e^{i\psi_2} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{2i\theta_i}, \quad (3)$$

que indicam a fase de sincronização do sistema.

B. Descrição vetorial

Chandra et al [3] propuseram uma nova forma de escrever o modelo de Kuramoto em termos de variáveis vetoriais. Em vez de usar as variáveis angulares θ , definem-se os vetores unitários 2D

$$\vec{\sigma}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i) \quad (4)$$

e o parâmetro de ordem complexo z pode ser reescrito como o vetor

$$\vec{r} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{\sigma}_j \quad (5)$$

É fácil mostrar que, se θ_i satisfaz o modelo de Kuramoto de ordem superior (1), então

$$\frac{d\vec{\sigma}_i}{dt} = \mathbf{W}_i \vec{\sigma}_i + \frac{1}{N} \sum_{j=2}^4 K_j [\vec{r}_j - (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{r}_j) \vec{\sigma}_i], \quad (6)$$

onde

$$\vec{r}_2 = \vec{r}, \quad (7)$$

$$\vec{r}_3 = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N (\vec{r} \cdot \vec{\sigma}_k) \vec{\sigma}_k - \vec{r}, \quad (8)$$

$$\vec{r}_4 = r^2 \vec{r} \quad (9)$$

e sendo \mathbf{W}_i uma matriz anti-simétrica contendo as frequências naturais:

$$\mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

C. Generalização

A equação (6) pode ser generalizada substituindo-se as constantes de acoplamento K_j por matrizes constantes \mathbf{K}_j :

$$\frac{d\vec{\sigma}_i}{dt} = \mathbf{W}_i \vec{\sigma}_i + \frac{1}{N} \sum_{j=2}^4 [\mathbf{K}_j \vec{r}_j - (\vec{\sigma}_i \cdot \mathbf{K}_j \vec{r}_j) \vec{\sigma}_i], \quad (11)$$

É fácil ver que as novas equações preservam a norma dos vetores unitários, de forma que $\sigma_i = 1$. O modelo original pode ser recuperado fazendo-se $\mathbf{K}_j = K_j \mathbf{1}$. No entanto, outros acoplamentos são agora possíveis dentro do mesmo esquema geral do modelo. Conforme [4, 5] pretendemos explorar a seguinte parametrização das matrizes constantes de acoplamento:

$$\mathbf{K}_j = k_j \begin{pmatrix} \cos \alpha_j & \sin \alpha_j \\ -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{pmatrix} + j_j \begin{pmatrix} -\cos \beta_j & \sin \beta_j \\ \sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix}, \quad (12)$$

II. EQUAÇÕES DINÂMICAS GLOBAIS

Para obter um sistema de equações que descreva a dinâmica global do sistema, uma análise análoga à realizada em nosso artigo [4] foi aplicada ao modelo de Kuramoto de ordem superior, formulado em sua forma vetorial com acoplamentos generalizados por matrizes (Eq. 11). No limite de um número infinito de osciladores, o parâmetro de ordem do sistema –isto é, o vetor médio que caracteriza seu estado coletivo – equivale a uma integral definida sobre todos os valores possíveis da frequência natural ω e ao longo de todo o intervalo da fase θ . Essa integral pondera os versores de fase $e^{i\theta}$ pela função densidade $f(\omega, \theta, t)$, que representa a fração de osciladores com frequência natural ω que possuem fase θ no instante t . A evolução temporal dessa função densidade obedece à equação de continuidade, que leva em conta o fluxo de osciladores ao longo da direção angular.

Uma expansão em séries de Fourier pode, então, ser utilizada para representar f em relação à fase periódica θ . Cada coeficiente de Fourier, dependente de ω e t , corresponde à amplitude complexa de um modo harmônico específico. Ott e Antonsen [6] propõem reduzir significativamente a dimensionalidade do problema ao restringir a solução a uma classe autorrestrita, assumindo que essas amplitudes sigam uma progressão geométrica em função da ordem do respectivo modo harmônico. Especificamente, postulam que cada coeficiente seja proporcional a uma potência de um único parâmetro complexo $\alpha(\omega, t)$, que encapsula tanto a amplitude quanto a fase locais no espaço das frequências naturais ω .

Essa hipótese permite reescrever explicitamente a função f em termos desse parâmetro complexo local, o que, ao ser inserido na equação de continuidade, leva a uma equação dinâmica para $\alpha(\omega, t)$. Como o parâmetro

de ordem global é definido por uma integral ponderada desse parâmetro local sobre toda a distribuição de frequências naturais, sua evolução temporal pode ser obtida ao resolver essa relação integral. No caso particular de uma distribuição de frequências Lorentziana, a integral pode ser avaliada via técnica do resíduo, o que resulta em uma equação fechada para a dinâmica do parâmetro de ordem global. Dessa forma, a equação diferencial original, que dependia explicitamente da dis-

tribuição das fases e das frequências individuais, pode ser reformulada para descrever diretamente a evolução do parâmetro de ordem global do sistema.

Aplicando a análise descrita para o modelo de Kuramoto de ordem superior e assumindo um acoplamento matricial parametrizado pelas constantes k_j , j_j , α_j e β_j (Eq. 12), obtemos as seguintes equações para a dinâmica da magnitude r e fase ψ do parâmetro de ordem global:

$$\dot{r} = -\Delta r + \frac{r}{2}(1 - r^2) \left(k_2 \cos \alpha_2 - j_2 \cos(2\psi + \beta_2) + r^2 \sum_{j=3}^4 (k_j \cos \alpha_j - j_j \cos(2\psi + \beta_j)) \right), \quad (13)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{1}{2}(1 + r^2) \left(k_2 \sin \alpha_2 - j_2 \sin(2\psi + \beta_2) + r^2 \sum_{j=3}^4 (k_j \sin \alpha_j - j_j \sin(2\psi + \beta_j)) \right). \quad (14)$$

III. SETORES

Por simplicidade, podemos fixar $\mathbf{K}_4 = \mathbf{0}$ e escrever as equações dinâmicas como

$$\dot{u} = -uf(u, \theta) = -u[2 - (1 - u)(\kappa_{2,c} + u\kappa_{3,c})] \quad (15)$$

$$\dot{\theta} = -h(u, \theta) = -(1 + u)(\kappa_{2,s} + u\kappa_{3,s}) \quad (16)$$

onde $u = r^2$, $\theta = 2\psi + \beta$ e

$$\begin{cases} \kappa_{j,c} = k_j \cos \alpha - j_j \cos \theta \\ \kappa_{j,s} = k_j \sin \alpha - j_j \sin \theta. \end{cases} \quad (17)$$

Os autovalores das matrizes \mathbf{K}_j são dados por

$$\lambda_{j,\pm} = k_j \cos \alpha \pm \sqrt{j_j^2 - k_j^2 \sin^2 \alpha}, \quad (18)$$

e podemos definir os discriminantes

$$\Delta_j \equiv j_j^2 - k_j^2 \sin^2 \alpha \quad (19)$$

que diferenciam quatro setores

- A. $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 \geq 0$ (matrizes de autovalores reais)
- B. $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 < 0$ (matriz de dois corpos de autovalores reais, matriz de três corpos de autovalores complexos)
- C. $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 \geq 0$ (matriz de dois corpos de autovalores complexos, matriz de três corpos de autovalores reais)
- D. $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$ (matrizes de autovalores complexos)

A. Setor A

Neste caso, buscamos por soluções de equilíbrio das equações 15, 16. Em um caso particular, digamos, de ambos $k_j \sin \alpha = j_j \sin \theta$, isso significa que

$$\begin{cases} \kappa_{j,c} = k_j \cos \alpha + \sqrt{\Delta_j}, \\ \kappa_{j,s} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

o que faz 15 autônoma, como no caso da região de fase regulada de [4]. Realizando a análise de estabilidade linear da solução trivial da equação 15, encontramos a equação regulada

$$\delta \dot{u} = -\delta u [2 - \kappa_{2,c}] \quad (21)$$

que se torna instável quando o termo entre parênteses é menor que zero, ou seja, quando

$$\kappa_{2,c} > 2. \quad (22)$$

ou

$$k_2 \cos \alpha + \sqrt{\Delta_2} > 2, \quad (23)$$

que corresponde a ajustar $\lambda_{2,+} > 2$.

A solução não trivial emerge ao fixar $f(u, \psi) = 0$, ou seja

$$\kappa_{3,c} u^2 + (\kappa_{2,c} - \kappa_{3,c})u - \kappa_{2,c} + 2 = 0, \quad (24)$$

de que provêm as soluções

$$u_{\pm} = \frac{\kappa_{3,c} - \kappa_{2,c} \pm \sqrt{(\kappa_{2,c} + \kappa_{3,c})^2 - 8\kappa_{3,c}}}{2\kappa_{3,c}}. \quad (25)$$

Estas, no entanto, só são possíveis quando

$$\kappa_{2,c} \geq 2\sqrt{2\kappa_{3,c}} - \kappa_{3,c} \quad \text{or} \quad \kappa_{3,c} \geq 4 - \kappa_{2,c} + 2\sqrt{2(2 - \kappa_{2,c})}. \quad (26)$$

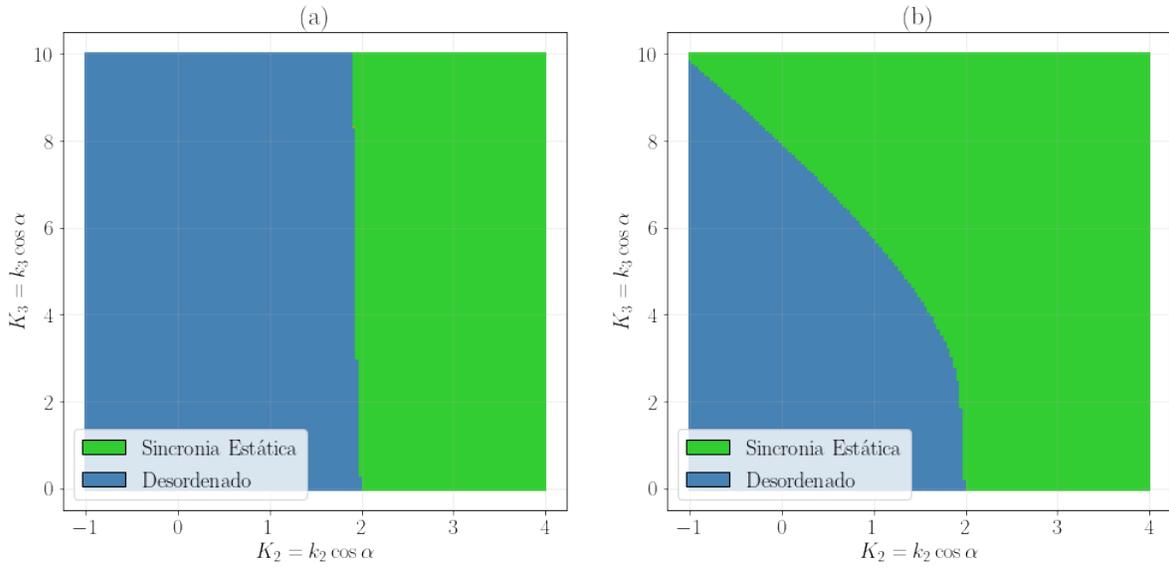


FIG. 1. Regiões obtidas da simulação das equações 15 e 16 no setor A do caso representativo $j_j = k_j \sin \alpha$, $j = 2, 3$. Em (a) escolhe-se o ponto inicial $r_0 = 0.01$, enquanto em (b) escolhe-se $r_0 = 1.0$. A região verde contém pontos (K_2, K_3) em que a simulação leva a um $r > 0.1$, com $\dot{r} = 0$, o que denota uma sincronia estática. A região azul, por sua vez, mostra os casos em que $r \approx 0$, desordenado.

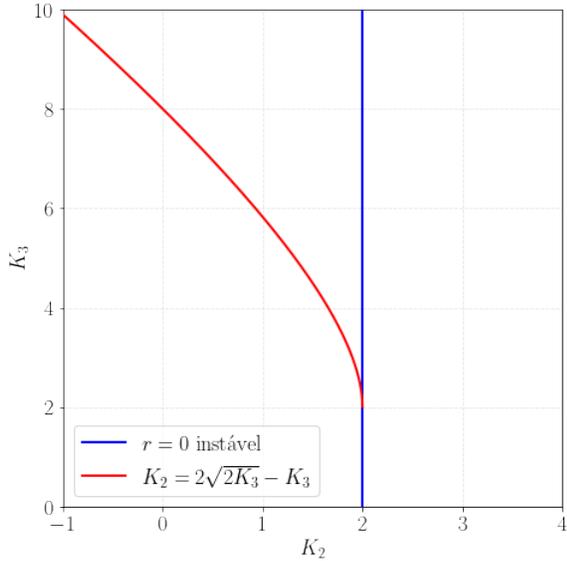


FIG. 2. Regiões previstas no plano K_2 - K_3 , com $K_j = k_j \cos \alpha$, para o caso $j_j = k_j \sin \alpha$. A linha azul marca o limiar de estabilidade da solução desordenada. Acima da linha vermelha, há a possibilidade de a solução u_+ existir e ser estável ao lado da solução trivial. Note que o caso $\alpha = 0$ é exatamente o de Skardal & Arenas.

Escolher os casos representativos $j_j = k_j \sin \alpha$ (que corresponde a $\Delta_j = 0$), como na linha do Kuramoto Original do plano J-K mostrado em [4], nos permite fazer um diagrama de fases de $K_2 \times K_3$ e simular numericamente as equações 15 e 16 neste espaço, que mostram uma região

de biestabilidade da solução desordenada e de sincronia estática (Fig. 1). A Fig. 2 mostra as previsões tanto das possibilidades das soluções 25, quanto da instabilidade da solução $r = 0$, que coincidem com os resultados numéricos.

CONCLUSÃO

O tratamento matricial desenvolvido neste trabalho amplia o panorama dinâmico do modelo de Kuramoto com interações de ordem superior. Ao promover cada constante escalar K_j a uma matriz K_j parametrizada por rotações (α_j, β_j) e amplitudes independentes (k_j, j_j) [Eq. (12)], o acoplamento deixa de atuar como mero escalonamento, abrindo novas possibilidades para a auto-organização coletiva. A redução de dimensionalidade via ansatz de Ott–Antonsen conduz a um par de equações globais, Eqs. 13 e 14, em que os termos matriciais entram de forma explícita e controlável.

Analisando os autovalores $\lambda_{j,\pm}$ das matrizes de acoplamento, introduzimos os discriminantes Δ_j e separamos o espaço de parâmetros em quatro setores, distinguindo combinações de autovalores reais e complexos. Essa classificação unifica, sob um mesmo formalismo, transições já conhecidas—como a biestabilidade estática—e fenômenos inéditos, nomeadamente estados oscilatórios estáveis que surgem quando pelo menos uma das matrizes possui autovalores complexos. Nos casos de autovalores estritamente reais (Setor A), recuperamos as mesmas condições de instabilidade de $r = 0$ e as soluções sincronizadas u_{\pm} obtidas por Skardal e Arenas. Assim, o cenário original aparece como um caso particular den-

tro do espaço ampliado gerado pelo acoplamento matricial. Nos setores mistos (B e C) mostram-se possíveis, respectivamente, transições entre comportamento desorde-

nado sincronias estáticas e estados oscilatórios, enquanto no setor D temos uma dinâmica puramente estática do parâmetro de ordem.

-
- [1] Y. Kuramoto, Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators, in *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics* (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1975) pp. 420–422.
- [2] P. S. Skardal and A. Arenas, Higher order interactions in complex networks of phase oscillators promote abrupt synchronization switching, *Communications Physics* **3**, 218 (2020).
- [3] S. Chandra, M. Girvan, and E. Ott, Continuous versus discontinuous transitions in the d-dimensional generalized kuramoto model: Odd d is different, *Physical Review X* **9**, 011002 (2019).
- [4] G. L. Buzanello, A. E. D. Barioni, and M. A. M. de Aguiar, Matrix coupling and generalized frustration in kuramoto oscillators, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **32**, 093130 (2022), https://pubs.aip.org/aip/cha/article-pdf/doi/10.1063/5.0108672/16499354/093130_1_online.pdf.
- [5] R. Fariello and M. A. de Aguiar, Exploring the phase diagrams of multidimensional kuramoto models, *Chaos, Solitons Fractals* **179**, 114431 (2024).
- [6] E. Ott and T. M. Antonsen, Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators, *Chaos* **18**, 1 (2008), arXiv:arXiv:0806.0004v1.