MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE SISTEMAS MULTICOMPONENTE: APLICAÇÃO NO PROJETO DE ESTRUTURAS LEVES

Palavras-Chave: OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA, ESTRUTURAS MULTICOMPONENTES, ELEMENTOS FINITOS

Autores:

LUIZ FERNANDO BOSCOLO LOPES, FEM – UNICAMP

Prof. Dr. RENATO PAVANELLO, FEM – UNICAMP

INTRODUÇÃO:

A otimização topológica estrutural é uma abordagem voltada ao design de estruturas mecânicas, cujo objetivo é encontrar geometrias que maximizem o desempenho estrutural enquanto atendem a restrições específicas. Por meio de métodos numéricos e rotinas computacionais, é possível redistribuir o material dentro de um domínio definido, obtendo configurações eficientes que realizam a função desejada com o menor consumo de material possível.

O atual projeto concentra-se na otimização de estruturas multicomponentes — sistemas formados por múltiplos elementos estruturais que podem possuir diferentes propriedades e características mecânicas. Diferente das abordagens tradicionais, que analisam componentes individualmente, este estudo busca explorar a interação entre diferentes partes da estrutura, levando em consideração restrições e requisitos específicos de cada componente.

O principal objetivo do projeto é minimizar o *compliance*, garantindo maior rigidez e eficiência mecânica. Ao mesmo tempo, a redução da massa estrutural é considerada uma restrição fundamental, buscando desenvolver estruturas leves sem comprometer seu desempenho. A metodologia será baseada no método de interpolação SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), aplicado em conjunto com o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a discretização, modelagem e análise estrutural, juntamente com o algoritmo MMA (*Method of Moving Asymptotes*) como solucionador de problemas de otimização com restrições.

A implementação da rotina computacional foi realizada no ambiente *MATLAB*. O código desenvolvido permite a definição flexível da malha, a aplicação de carregamentos e condições de contorno, além da integração do algoritmo de otimização com filtragem de sensibilidades e visualização gráfica da evolução topológica a cada iteração.

METODOLOGIA:

MODELAGEM MATEMÁTICA:

A modelagem do domínio estrutural adotado baseia-se em uma formulação bidimensional sob a hipótese de estado plano de tensões. Assume-se que o material se comporta de maneira linearmente elástica, homogênea e isotrópica, comportando-se baseado na Lei de Hooke Generalizada, e garantindo um comportamento descrito pela equação constitutiva (Eq. 1):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon}, \quad (1)$$

onde E é o módulo de elasticidade (de Young), ν é o coeficiente de Poisson, $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações, e $\boldsymbol{D}$ é a matriz constitutiva (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS:

A discretização do domínio é realizada por meio de uma malha regular composta por elementos retangulares bilineares (Fig. 1). Cada elemento possui grau de liberdade em duas direções (horizontal e vertical) por nó, totalizando oito graus de liberdade por elemento. Dessa forma, podemos deduzir as seguinte funções de forma (Eqs. 2–5):

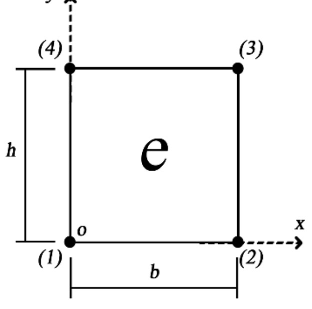

Figura 1: Elemento retangular de discretização do MEF

$$N_1 = \frac{(b-x)(h-y)}{bh} \quad (2) \qquad N_2 = \frac{x(h-y)}{bh} \quad (3)$$

$$N_3 = \frac{xy}{bh} \quad (4) \qquad N_4 = \frac{(b-x)y}{bh} \quad (5)$$

A partir delas, aplicando o método de Galerkin, obtemos a matriz de rigidez para cada elemento ($\boldsymbol{K_e}$) integrando no domínio estrutural, conforme a Eq. 6 (KWON; BANG, 1997):

$$\boldsymbol{K_e} = \int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{DB}d\Omega = \int_0^h\int_0^b \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{DB}d\mathrm{xdy}, \quad (6)$$

onde a matriz $\boldsymbol{B}$ é definida, a partir das derivadas das funções de forma, como:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y}\end{bmatrix}$$

INTERPOLAÇÃO SIMP:

Para modelar a presença ou ausência de material nos elementos da malha, adota-se o modelo de interpolação SIMP, no qual cada elemento é associado a uma pseudo-densidade (ρ_e). Essa variável contínua representa uma fração relativa de material que, no caso ideal, é formada pelos valores 0–1, representando uma malha "preta-e-branca" do elemento estrutural otimizado.

Em cada iteração da rotina de otimização topológica, a matriz de rigidez global ($\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho})$) é montada a partir da soma das contribuições individuais penalizadas de cada elemento, conforme a Eq. 7:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{N} \rho_e^p \boldsymbol{K_e} \ , \qquad (7)$$

onde p é o fator de penalização, tipicamente definido como $p = 3$ para solução de problemas de otimização bidimensionais (SIGMUND, 2001).

PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO:

A formulação do problema de otimização pode ser apresentada como:

$$\min_{\rho} \quad c(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{u} \tag{8}$$

$$sujeito\ a \quad \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{9}$$

$$\overline{V_e}(\boldsymbol{\rho}) \leq V_{max}, \tag{10}$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1, \ \ \forall e = 1, \dots, N \tag{11}$$

Para esse trabalho, a otimização topológica tem como função objetivo a *compliance* (c), que representa a deformabilidade da estrutura sob a ação do carregamento externo ($\boldsymbol{f}$). Visamos a sua minimização (Eq. 8) de forma a garantir uma estrutura suficientemente rígida para a aplicação desejada.

O sistema estrutural deve satisfazer a condição de equilíbrio estático (Eq. 9), proveniente da formulação do MEF, obtendo-se os deslocamentos ($\boldsymbol{u}$) de cada elemento discretizado.

Por sua vez, o problema possui uma restrição de volume máximo final permitido para a estrutura otimizada, computado como a média dos volumes de cada elemento ($\overline{V_e}$) (Eq. 10).

Finalmente, é imposto um valor mínimo para a variável de pseudo-densidade, de forma a evitar singularidades numéricas durante o processo iterativo, para todos os N elementos discretizados (Eq. 11).

ANÁLISE E FILTRAGEM DA SENSIBILIDADE:

A análise de sensibilidade quantifica a contribuição de cada elemento na função objetivo, permitindo identificar zonas de maior relevância no domínio estrutural, e orientar de forma eficiente a atualização das variáveis de projeto.

No caso da otimização com penalização SIMP, a derivada da *compliance* em relação à densidade de cada elemento discreto (sensibilidade) é dada pela Eq. 12:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p{\rho_e}^{p-1}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K_e}\boldsymbol{u} \tag{12}$$

Entretanto, o uso direto dessas sensibilidades pode levar à formação de padrões numéricos não físicos. Para mitigar esses efeitos, é empregado um filtro de sensibilidade baseado na média ponderada, que suaviza os gradientes locais considerando a vizinhança de cada elemento. A forma filtrada da sensibilidade é calculada conforme a Eq. 13:

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{f=1}^{N} H_f \rho_f \frac{\partial c}{\partial \rho_f}}{\rho_e \sum_{f=1}^{N} H_f} \ , \tag{13}$$

onde o subscrito e representa o elemento alvo, e o subscrito f represento o elemento vizinho. O termo H_f é o operador de convolução, sendo definido como $H_f = r_{min} - dist(e,f)$. Assim, é caracterizada a influência dos elementos vizinhos, de acordo com sua distância em relação ao elemento central, com r_{min} sendo o raio de influência do filtro (elementos fora desse raio não influenciam o elemento alvo) (SIGMUND, 2001).

Com as restrições estabelecidas e a sensibilidade filtrada, é possível aplicar o algoritmo MMA para resolver o subproblema de otimização. Esse método utiliza as informações de derivadas e os limites de projeto para atualizar as pseudo-densidades dos elementos. A atualização respeita tanto a penalização SIMP quanto a restrição de volume imposta, conduzindo a uma distribuição de material que minimiza a *compliance* estrutural de forma eficiente e estável. (SVANBERG, 1987).

ROTINA COMPUTACIONAL:

A rotina computacional implementada no *MATLAB* segue o fluxograma da Fig. 2.

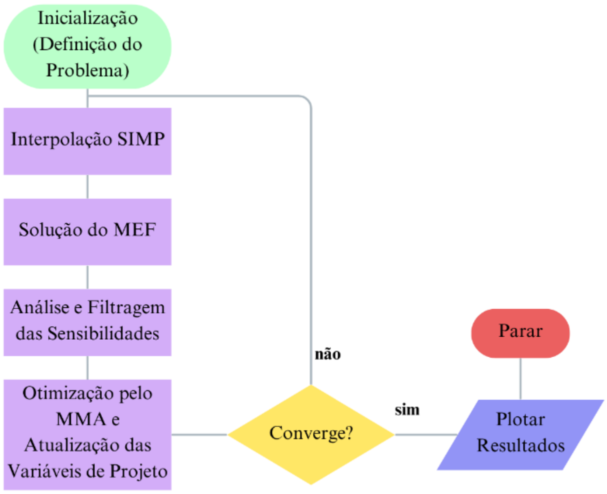

Figura 2: Fluxograma da rotina computacional

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

O modelo de exemplo considera uma viga engastada, com somente um carregamento simples vertical, conforme a Fig. 3.

A estrutura, de dimensões 8×5 metros foi discretizada com elementos quadrados regulares, com $h = b = 0.1$ metros. O fração de volume final foi restringida para 50% do volume inicial.

O raio de influência do filtro de sensibilidade foi definido como $r_{min} = 3$ elementos, e o limite de movimentação da assíntotas do MMA foi definido em 0.5.

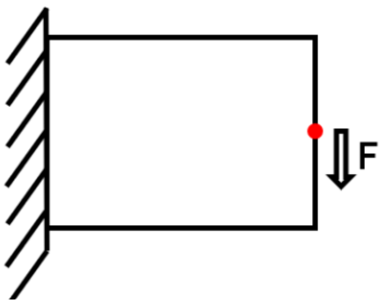

Figura 3: Modelo de viga para o exemplo

É possível notar que o filtro de sensibilidade (demonstrado na Fig. 4) evidencia zonas críticas na estrutura, que serão priorizadas na seguinte iteração da otimização.

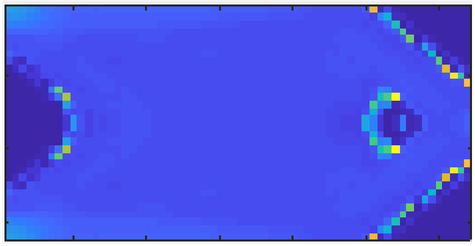

Figura 4: Exemplo do filtro de sensibilidade (zonas amarelas são mais relevantes estruturalmente)

Após o processo de otimização topológica para o exemplo citado, e um pós-processamento das densidades (de forma a obter um padrão "preto-e-branco"), obtivemos, como resultado, uma estrutura otimizada de acordo com as restrições de projeto antes definidas (Fig. 5). Juntamente, podemos definir um gráfico da variação da *compliance* e da fração volumétrica a cada iteração, até a convergência (Fig. 6).

Figura 5: Resultado da otimização topológica para o caso exemplo

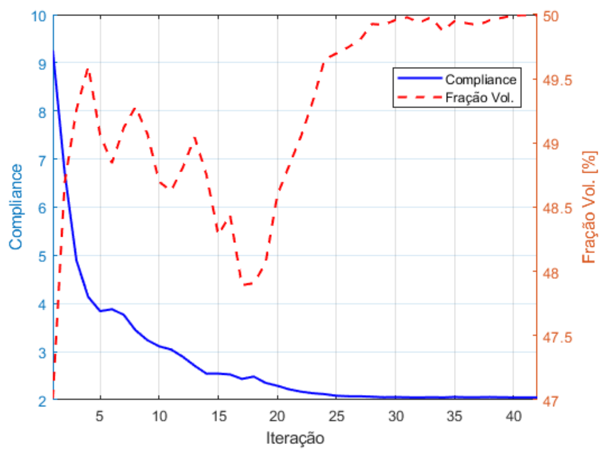

Figura 6: Compliance e Fração Vol. a cada iteração

CONCLUSÕES:

A combinação do método SIMP com o algoritmo MMA mostrou-se uma abordagem robusta para a otimização topológica, especialmente pela capacidade do MMA em lidar com múltiplas restrições simultâneas de forma eficiente e estável. Essa sinergia permite a atualização confiável das variáveis de projeto em problemas de grande porte, garantindo que os limites físicos e de volume sejam respeitados ao longo das iterações, o que é essencial em aplicações estruturais reais.

Além disso, o uso de um filtro de sensibilidade foi fundamental para assegurar a convergência da solução. Ele atua suavizando variações abruptas nas derivadas da função objetivo, e orientando o algoritmo a atualizações adequadas das variáveis de projeto.

O código desenvolvido é flexível e pode ser expandido futuramente para aplicações multicomponentes, com diferentes funções objetivo e restrições por domínio.

BIBLIOGRAFIA:

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications**. 2ª ed. Nova Iorque, Springer Science, 2004.

KWON, Y. W.; BANG, H. **The Finite Element Method using MATLAB**. University of Minnesota, Nova Iorque, CRC Press, 1997.

SIGMUND, O. **A 99 line topology optimization code written in Matlab**. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 21, p. 120-127, 2001.

SVANBERG, K. **The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.24, p. 359-373, 1987.