XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp
2025

# Formalizando um teorema de classificação para álgebras de Lie solúveis de baixa dimensão em Lean

Gustavo Infanti  Viviana del Barco(Orientadora)  Exequiel Rivas
Paul Schwahn

8 de agosto de 2025

**Palavras-chave:** Formalização matemática, Teoria de Lie, Lean

## 1 Introdução

A formalização matemática é uma área que tem atraído interesse de matemáticos, com projetos como o PrimeNumberTheoryAnd para formalização do teorema dos números primos ou o projeto recente de formalização do empacotamento em oito dimensões. Ferramentas de formalização tem grande valor em reduzir erros humanos e permitir que todas as dependências de uma prova matemática estejam explícitas. Uma dessas ferramentas, o assistente de provas Lean [1], ganhou uma ampla adoção devido a suas fundações expressivas, cálculo predicativo de suas construções indutivas e seu elaborador. O Lean é complementado pelo [4], uma biblioteca mantida pela comunidade que inclui a formalização de resultados em várias áreas da matemática incluindo teoria de grupos, álgebra comutativa, teoria dos números, álgebra linear, teoria da medida, geometria diferencial e outros. Essa pesquisa é sobre a formalização de um teorema de classificação no contexto das álgebras de Lie já presentes no mathlib.

O estudo das álgebras de Lie começou com o trabalho de Sophus Lie, no século XIX, que as introduziu para estudar simetrias contínuas de equações diferenciais. Grupos de Lie podem ser entendidos como grupos contínuos de transformações, enquanto álgebras de Lie são conjuntos de simetrias "infinitesimais". Ambas essas estruturas, são utilizadas em diversas áreas, por exemplo, geometria, álgebra e física.

Na matemática, um teorema de classificação de uma coleção de objetos é uma lista exaustiva não-redundante de classes de equivalência desses objetos, dada uma noção apropriada de equivalência ou isomorfismo, cada objeto na coleção pertence a apenas uma das classes de equivalência. É natural estudar a classificação no contexto das álgebras de Lie de certas dimensões e/ou tipos (simples, solúvel, etc).

# 2 Lean

O Lean é uma linguagem de programação funcional "open source" que pode ser utilizada para provar resultados de maneira interativa. A criação do Lean ocorreu em 2013, com sua quarta versão lançada em 2021 [1]. Os assistentes de provas verificam que determinada prova de um resultado seja verificada em sua fundamentação lógica. Sendo assim, ao formalizar uma prova em Lean ela está garantida de estar correta. A parte interativa do Lean ocorre pois a cada passo da prova, o próximo passo da prova é revelado.

A grande vantagem da formalização de provas via Lean é a possibilidade de trabalhar colaborativamente com um grande número de pessoas. Um exemplo disso é a formalização em Lean liderada pelo Terence Tao da conjectura Polinomial Freiman-Ruzsa . Nesse modelo de colaboração várias pessoas participam da prova, fazendo com que o tempo para conclusão da formalização seja reduzido. Outro exemplo de projeto no Lean é a formalização do Último Teorema de Fermat, liderado por Kevin Buzzard.

Uma característica do Lean é a existência de uma biblioteca comunitária de definições, lemas, teoremas e resultados de diversas áreas da matemática que já foram provados no Lean, chamada de mathlib. Com isso, a formalização de resultados em áreas que já foram formalizadas é facilitada. Além disso, na comunidade do Lean [4] é possível visualizar as diferentes secções do mathlib, bem como as dependências entre as definições, por exemplo a definição de anel depende da definição de grupo comutativo.

O Lean funciona por meio de $goals$, em que a prova de um resultado depende da prova de todas as $goals$, objetivos. Para avançar na demonstração dessas $goals$, dada as hipóteses, é necessário o uso de táticas, cada uma possui diferenças teóricas e funcionalidades diferentes, mas elas permitem "resolver"as $goals$ utilizando simplificações, outros resultados já provados, ou técnicas mais avançadas.

# 3 Fundação matemática

Iniciamos com definições básicas sobre álgebras de Lie, encontradas em livros-texto no assunto.

**Definição 1** *Um espaço vetorial $L$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ com uma operação $[\,\cdot\,,\cdot\,] : L \times L \to L$ é uma* álgebra de Lie *sobre $\mathbb{K}$ se satisfaz as condições:*

(i) $[\,\cdot\,,\cdot\,] : L \times L \to L$ *é bilinear;*

(ii) $[x, x] = 0$ *para todo* $x \in L$*;*

(iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$

A operação definida anteriormente é chamada de colchete de Lie de $L$. A segunda condição é chamada de anti-simetria do colchete, pois implica que $[x, y] = -[x, y]$ para todo $x, y \in L$. Já a última condição é chamada de identidade de *Jacobi*, em outras apresentações é denominada de regra de *Leibniz.*

*álgebras de Lie abelianas.* Uma álgebra de Lie é dita abeliana se o colchete de Lie é trivial, i.e. $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in L$.

*Subálgebra de Lie.* Um espaço vetorial $L' \subset L$ é dito subálgebra de Lie de $(L, [\,\cdot\,,\cdot\,])$ se é fechado quanto ao colchete de $L$, ou seja, $[x, y] \in L'$ para todo $x, y \in L'$.

*Mapas entre álgebras de Lie.* Seja $(L_1, [\,\cdot\,,\cdot\,]_1)$ e $(L_2, [\,\cdot\,,\cdot\,]_2)$ álgebras de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $f : L_1 \to L_2$ é um mapa linear e preserva o colchete, i.e. $f([x, y]_1) = [f(x), f(y)]_2$ para $\forall x, y \in L_1$, então é um *homomorfismo* de álgebras de Lie. Se esse mapa for invertível é chamado *isomorfismo*, na qual a noção de classes de equivalência dos teoremas de classificação nesse contexto é baseada. Um mapa linear $D : L \to L$ de uma álgebra de Lie $(L, [\,\cdot\,,\cdot\,])$ é uma derivação se $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ para todo $x, y \in L$. O conjunto de todas as derivações de $L$ é denotado por $\mathrm{Der}(L)$, esse conjunto com o colchete $[A, B] = AB - BA$ para $A, B \in \mathrm{Der}(L)$ é uma álgebra de Lie.

*Ideais.* Se um subespaço vetorial $I \subseteq L$ álgebra de Lie é tal que $[x, y] \in I$ para todo $x \in L$, $I$ é dito ideal de $L$. O núcleo de um homomorfismo de álgebras de Lie é sempre um ideal. Além disso, se $I \subset L$ é um ideal, o quociente $L/I$ é uma álgebra de Lie com colchete induzido.

O centro de $L$ é definido como $\mathfrak{z}(L) := \{x \in L : [x,y] = 0 \quad \forall y \in L\}$ é um ideal particular de $L$. Se $L = \mathfrak{z}(L)$ temos que $L$ é abeliana. Uma álgebra de Lie não abeliana que não contém ideais além de $\{0\}$ e $L$ é chamada simples.

*Série derivada.* Dado ideais $I, J \subset L$, $[I,J] \subseteq I \cap J$ é definido como o conjunto $\{[x,y\,] : x \in I, y \in J\}$. Em particular o ideal $[L,L]$ é chamado de comutador ou subálgebra derivada de $L$. A série derivada de uma álgebra de Lie é definida como

$$\mathcal{D}^0(L) := L, \qquad \mathcal{D}^k(L) := [\mathcal{D}^{k-1}, \mathcal{D}^{k-1}] \quad \text{para } k \geq 1.$$

Assim, $\mathcal{D}^0(L) \supseteq \mathcal{D}^1(L) \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{D}^k(L) \supseteq \ldots.$ Uma álgebra de Lie $L$ é dita solúvel se $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{D}^k(L) = 0$. Se $L$ é abeliana, então $L$ é solúvel.

Com essas definições está claro que $L$ não pode ser solúvel e simples. Em um corpo de característica zero o teorema de Levi [3] implica que toda álgebra de Lie é produto semidireto de álgebra de Lie sendo uma solúvel e uma simples. Para dimensões até 3 uma álgebra de Lie é simples ou solúvel, para qualquer corpo $\mathbb{K}$.

## 4 Teorema de classificação

O teorema de classificação para álgebras de Lie solúveis de dimensão menor que 3, está exposto abaixo:

**Teorema 1** *[2] Seja $L$ uma álgebra de Lie solúvel de dimensão $\leq 3$ sobre um corpo $\mathbb{K}$.*

(i) *Se $\dim L = 1$, então $L$ é isomorfa a álgebra de Lie abeliana $\mathbb{K}$;*

(ii) *Se $\dim L = 2$, então $L$ é isomorfa a álgebra de Lie abeliana $\mathbb{K}^2$ ou a $\mathfrak{aff}(\mathbb{K})$;*

(iii) *Se $\dim L = 3$, então $L$ é isomorfa a $\mathbb{K}^3$, $\mathfrak{heis}_3(\mathbb{K})$, $\mathfrak{aff}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}$, $\mathfrak{hyp}_3(\mathbb{K})$, $L_\alpha$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}^\times$, ou $M_\delta$ para algum $\delta \in \mathbb{K}^\times/(\mathbb{K}^\times)^2$, onde $(\mathbb{K}^\times)^2$ denota o subgrupo dos quadrados $\mathbb{K}^\times$.*

*Onde quaisquer par de álgebras de Lie não são isomorfas.*

Cada representante pode ser encontrado na tabela abaixo [2]:

| Dim | Notation | Lean name | Non-zero brackets |
|---|---|---|---|
| 1 | $\mathbb{K}$ | `K` | – |
| 2 | $\mathbb{K}^2$ | `Dim2.Abelian K` | – |
| | $\mathfrak{aff}(\mathbb{K})$ | `Dim2.Affine K` | $[b_0, b_1] = b_1$ |
| 3 | $\mathbb{K}^3$ | `Dim3.Abelian K` | – |
| | $\mathfrak{heis}_3(\mathbb{K})$ | `Dim3.Heisenberg K` | $[b_1, b_2] = b_0$ |
| | $\mathfrak{aff}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}$ | `Dim3.AffinePlusAbelian K` | $[b_1, b_2] = b_1$ |
| | $\mathfrak{hyp}_3(\mathbb{K})$ | `Dim3.Hyperbolic K` | $[b_0, b_1] = b_1$, $[b_0, b_2] = b_2$ |
| | $F_{\alpha,\beta}$, $\alpha \in \mathbb{K}^\times$, $\beta \in \mathbb{K}$ | `Dim3.Family K` $\alpha$ $\beta$, $\alpha \neq 0$ | $[b_0, b_1] = b_2$, $[b_0, b_2] = \alpha b_1 + \beta b_2$ |
| | $L_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{K}^\times$ | `Dim3.Family K` $\alpha$ `0`, $\alpha \neq 0$ | see above |
| | $M_{[\alpha]}$, $\alpha \in \mathbb{K}^\times$ | `Dim3.Family K` $\alpha$ `1`, $\alpha \neq 0$ | see above |

Table 1: Notation for low-dimensional Lie algebras.

As provas dos casos $\dim L \leq 2$ podem ser encontradas em livro-texto em álgebras de Lie. A formalização desses resultados em Lean segue diretamente a prova normal da matemática, não sendo necessários muitas ferramentas novas.

Já para o caso $\dim L = 3$, é necessário introduzir diversos lemas relacionados a propriedades seguidas pelo comutador da álgebra de Lie. De maneira superficial, dada uma álgebra de Lie de $\dim L = 3$, a dimensão do comutador pode ser $\dim[L, L] = 0, 1, 2 \leq 3$. A dimensão não pode ser 3 pois se isso acontece a álgebra de Lie é simples. Sob cada uma dessas hipóteses um lema de existência de uma base de $L$, com colchete entre elementos da base pré-determinados. Com esses lemas o teorema de classificação pode ser demonstrado.

Para provar que não existe nenhum par de álgebras de Lie isomorfas nessa classificação, dois caminhos foram utilizados, obtendo invariantes quanto ao isomorfismo e diretamente. Os invariantes utilizados estão relacionados com as dimensões do comutador e o centro da álgebra de Lie. Com isso o único caso de possível isomorfismo é nas álgebras de Lie com dimensão do comutador 2, que saí diretamente.

# 5 Trabalho futuro

A formalização do teorema de classificação resultou em vários resultados conhecidos em teoria de Lie que podem ser adicionados no mathlib, tais como resultados sobre quociente e comutador.

Além disso, o resultado pode ser estendido para álgebras de Lie solúveis em dimensão $\geq 4$. Apesar dos lemas e teoremas terem sido obtidos para corpos arbitrários, quando possível, o teorema principal de classificação depende em uma análise e bases caso-a-caso particulares a dimensão 3. Ou seja, para tal extensão é necessário introduzir novas bases e refazer a análise caso-a-caso. Seria muito útil encontrar maneiras de reutilizar os resultados em baixa dimensão para dimensões maiores. Uma possível maneira de resolver isso é utilizar o produto semidireto. Utilizando o fato de que toda álgebra de Lie solúvel de dimensão $n$ é isomorfa ao produto semidireto do corpo de escalares com uma álgebra de Lie solúvel de dimensão $n - 1$.

Outro possível caminho, é completar a classificação de dimensão 3, formalizando o caso das álgebras de Lie simples. Em corpos de característica zero, esse processo é factível. Já em característica positiva, é necessário um cuidado maior na construção do teorema de classificação.

**Apoio:** E. Rivas foi apoiado pelo *Estonian Research Council.* PSG749. V. del Barco recebeu suporte da FAPESP 2023/15089-9. G. Infanti foi suportado pela bolsa de graduação PICME-CNPQ. P. Schwahn recebeu suporte da bolsa FAPESP 2024/08127-4.

# Referências

[1] L. de Moura and S. Ullrich. The Lean 4 Theorem Prover and Programming Language. In *Automated Deduction – CADE 28*, page 625–635, Berlin, Heidelberg, 2021. Springer-Verlag.

[2] Viviana del Barco, Gustavo Infanti, Exequiel Rivas, and Paul Schwahn. Formalizing a classification theorem for low-dimensional solvable lie algebras in lean, 2025.

[3] N. Jacobson. *Lie algebras.* Dover Publications, Inc., New York, 1979. Republication of the 1962 original.

[4] The mathlib Community. The Lean mathematical library. In *Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs*, CPP 2020, page 367–381, New York, NY, USA, 2020. Association for Computing Machinery.