

Causalidade da Informação em sistemas bipartidos

Palavras-Chave: Informação quântica, Não-localidade de Bell, Causalidade da Informação

Autores(as): Alexandre Teodoro Garcia, DFMC – IFGW
Prof. Dr. Rafael Luiz da Silva Rabelo, DFMC – IFGW

Introdução

Considere o *Cenário de Bell* onde uma fonte envia um sistema físico para o laboratório de Alice e outro sistema físico para o laboratório de Bob. Em seu laboratório, Alice realiza a medição $x \in \mathcal{X}$, onde $\mathcal{X}$ representa o conjunto de possíveis medições de Alice, e obtém o resultado a , Bob realiza a medição $y \in \mathcal{Y}$, onde $\mathcal{Y}$ representa o conjunto de possíveis medições de Bob, e obtém o resultado b , respectivamente.

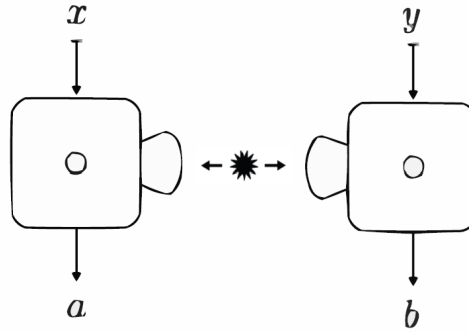


Figura 1: Um sistema onde uma fonte F gera duas partículas e as envia para duas partes A e B , as quais realizam medições x e y e obtém os resultados a e b . [2]

Após a realização desses experimentos repetidas vezes, correlações entre os resultados começam a aparecer nas distribuições de probabilidades $p(a|x)$ e $p(b|y)$. Supõe que não há nenhuma forma do resultado de Alice interferir no resultado de Bob ou vice-versa. Isso acontece, por exemplo, através de uma separação espacial, onde a informação do resultado de um experimento precisaria viajar à velocidades superiores à velocidade da luz para interagir com o outro experimento. Essa condição é chamada de condição de *Não-sinalização*. Assim, tem-se que toda e qualquer correlação entre os resultados obtidos nos experimentos deve ter se originado na fonte que enviou os sistemas físicos aos laboratórios [2].

Para representar matematicamente essas correlações introduz-se a variável λ , onde estão representadas todas as fontes de correlação possíveis. Também não é imposta nenhuma restrição sobre essa variável, para que ela de fato inclua fontes de correlações que possam ser desconhecidas [2]. Com isso é possível representar a distribuição de probabilidades do Cenário de Bell da seguinte forma:

$$p(a, b|x, y) = \int_{\Lambda} p(a|x, \lambda)p(b|y, \lambda)q(\lambda)d\lambda. \quad (1)$$

Bell provou em seu teorema que existem sistemas físicos os quais possuem certas correlações que não podem ser escritas utilizando a Eq. (1), tais correlações apresentam a *Não-localidade de Bell*. Curiosamente, existem sistemas que possuem correlações com Não-localidade tão forte que não podem

ser descritas nem por sistemas quânticos que respeitam a condição de não-sinalização. O que dá origem a uma nova classe de correlações *supra-quânticas* [2].

Tais correlações supra-quânticas foram provadas matematicamente por Tsirelson (1980, apud [2]), a qual a chamada *Cota de Tsirelson* afirma que as correlações quânticas não podem ser arbitrariamente não-locais. No entanto, ainda não é claro o motivo físico por trás dessa limitação das correlações quânticas.

Portanto, o *Princípio de Causalidade da Informação* é uma proposta de princípio físico por trás desse limite. Proposto em [3], o princípio pode ser escrito como

"O ganho de informação que Bob pode alcançar a respeito de um conjunto de dados de Alice, inicialmente desconhecido por ele, utilizando todos os seus recursos locais e k bits clássicos comunicados por Alice, é de no máximo k bits." ([4], 2021, p. 64)

Assim, o objetivo deste projeto é estudar o princípio de causalidade da informação em sistemas bipartidos, ou seja, duas partes. Após a introdução aos formalismos fundamentais de mecânica quântica e de não-localidade de Bell, foi estudada e testada a causalidade da informação em sistemas bipartidos como foi inicialmente proposta em [3].

Metodologia

Para o estudo da causalidade da informação em um sistema bipartido, primeiro se define a correlação que será utilizada. No estudo realizado nesse projeto, a correlação escolhida foi a caixa PR, descrita abaixo:

$$p(a, b|x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } a \oplus b = x \cdot y \\ 0, & \text{se } a \oplus b \neq x \cdot y \end{cases} \quad (2)$$

Em seguida é proposta uma tarefa em que Alice e Bob devem obter sucesso. Antes mesmo da tarefa começar, Alice e Bob combinam uma estratégia para tentar obter sucesso nessa tarefa. Então, Alice recebe n bits de informação e a partir deles, realiza um experimento x , obtém o resultado a , para então enviar uma mensagem M para Bob. Por seguinte, Bob recebe um *input* c , que contém a informação de qual dos n bits de Alice ele deve acertar corretamente; então Bob realiza um experimento y , obtém um resultado b e faz um palpite do valor do bit de Alice. Alice e Bob obtêm sucesso na tarefa se Bob acertar o bit de Alice. A tarefa está representada na Fig. 2

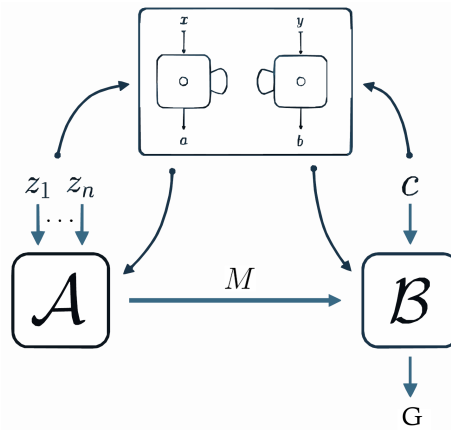


Figura 2: Esquemático da tarefa realizada por Alice e Bob.

É possível descrever essa tarefa através de funções as quais utilizam as variáveis do problema para descrever as estratégias utilizadas por Alice e Bob. Essas funções são dadas por:

$$x = f_1(z_0, z_1) \quad M = f_2(z_0, z_1, a) \quad y = f_3(c, M) \quad G = f_4(c, M, b) \quad (3)$$

A partir disso, é necessário mensurar a informação para verificar se há ou não violação do princípio. Para a descrição matemática da informação utiliza-se o conceito de *Entropia de Shannon*, uma função $H(x)$ que é diretamente relacionada com o grau de incerteza de um evento, pois acontecimentos inesperados são os que fornecem mais informação sobre um evento [4]. Essa função é dada por

$$H(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log_2(p(x)). \quad (4)$$

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2(p(x, y)). \quad (5)$$

X e Y representam os conjuntos de eventos associados às suas respectivas probabilidades, onde (1) representa a entropia da fonte X e (2) representa a entropia conjunta das fontes X e Y [4].

A partir dessas definições, introduz-se o conceito de *informação mútua* [4], definida abaixo:

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (6)$$

Assim o princípio da Causalidade da Informação se traduz matematicamente na seguinte equação:

$$\sum_{i=0}^n I(z_i : G|c = i) \leq k \quad (7)$$

Finalmente, foi feito um código em *python* que utiliza dos conceitos apresentados acima para verificar todas as estratégias que Alice e Bob podem utilizar para tentar obter vitória na tarefa. Calculando a informação mútua de todas as estratégias e destacando aquelas que violam o princípio de causalidade da informação.

Discussão

O objetivo do código é reproduzir resultados já conhecidos do sistema bipartido para verificação de sua validade e ganhar intuição sobre os problemas que envolvem causalidade da informação. A partir dele é possível identificar todas as estratégias disponíveis para Alice e Bob e identificar estratégias que violam o princípio de causalidade da informação. Com atenção extra às que violam maximamente o princípio, ou seja, obtêm informação mútua igual a 2, significando estratégias que fazem com que Bob saiba com certeza os dois bits de Alice, mesmo que Alice só tenha enviado um bit, garantindo a vitória na tarefa 100% das vezes.

Resultados

Até o momento do projeto de iniciação científica, tinha-se o objetivo de elencar todas as estratégias que Alice e Bob podiam ter que violava o princípio de causalidade da informação inicialmente formulado em [3]. Foram obtidas 4640 estratégias que violam o princípio da causalidade da informação, as quais 32 estratégias violam maximamente o princípio, ou seja, obtêm a informação mútua igual à 2.

Para os próximos passos, a partir das 4640 estratégias encontradas que violam o princípio, busca-se alterar a correlação utilizada. A nova correlação também é uma caixa PR, mas com a adição de uma identidade. A proposta é variar a "quantidade" de caixa PR na correlação para identificar a quantidade mínima da caixa PR é necessária para que haja violação. Está descrito abaixo essa nova relação.

$$p(a, b|x, y) = \alpha \cdot PR + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{8}, \quad (8)$$

onde PR representa a caixa PR e $\frac{1}{8}$ representa a identidade. A quantidade mínima de caixa PR será dada por α .

Referências

- [1] M.A. Nielsen, I.L. Chuang; “Quantum computation and quantum information”, Cambridge University Press (2000).
- [2] RABELO, Rafael. Não-localidade quântica: matemática e fundamentos. Orientador: Prof Dr. Marcelo de Oliveira Terra Cunha. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.
- [3] Pawłowski, M., Paterek, T., Kaszlikowski, D. et al. Information causality as a physical principle. *Nature* 461, 1101–1104 (2009). <https://doi.org/10.1038/nature08400>
- [4] POLLYCENO, Lucas da Silva. Novos critérios para o princípio da causalidade de informação. Orientador: Prof. Dr. Rafael Luiz da Silva Rabelo (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Campinas, 2021.