



Links de Kempe para curvas algébricas

Palavras-Chave: Curvas algébricas reais, Cônicas, Cúbicas, Cinemática Planar.

Autores:

Letícia Camponês do Brasil Maia, IMECC - UNICAMP;

Prof. Dr. Pietro Speziali (orientador), IMECC - UNICAMP.

1 Introdução

Este projeto de iniciação científica propõe um estudo na área de Curvas Algébricas Reais, e suas interações com a Cinemática Planar. Um resultado surpreendente de Kempe [5] afirma que toda curva plana pode ser “gerada mecanicamente”, ou seja, descrita por meio do movimento de algum “braço mecânico idealizado”, ou *link*. Mais recentemente, esse resultado foi melhorado, estendido à superfícies no espaço em [4]. Apesar da grande generalidade desses resultados, pouco se sabe sobre a interação entre a construção do *link* descrevendo uma certa curva C e a geometria de C , deixando muitas perguntas naturais não respondidas.

2 Metodologia

O projeto foi desenvolvido por meio do estudo dirigido de uma bibliografia variada acerca do tema, com a participação do docente. O enfoque foi feito em [6] para a definição abstrata do problema e sua demonstração rigorosa. Os linkages foram de confecção independente da aluna, com exemplos extensivamente trabalhados. No trabalho da base teórica clássica de curvas reais, [9] foi a bibliografia principal.

3 Estudos realizados

O ponto de partida deste projeto são resultados do matemático Alfred Bray Kempe. Em “*On a General Method of describing Plane Curves of the n^{TH} degree by Linkwork*” [5], ele apresenta uma prova incompleta do resultado hoje conhecido como Teorema da Universalidade de Kempe. De modo geral, tal resultado afirma que “Toda curva algébrica real pode ser descrita mecanicamente por um linkage”. Um linkage é uma coleção de segmentos unidimensionais de comprimento fixo chamados links ou barras. Cada link possui extremidades, vertex, onde se juntam à outros links. Vertices compartilhados constituem os vértices do linkage, que podem ser móveis ou fixos no plano. Apesar do grau intuitivo dessas construções, começaremos adotando uma definição formal de “Linkage” plano, assim como seu espaço de configuração:

Definição 3.1 [Linkage] *Um linkage abstrato é um par $\mathcal{L} = (G, l)$ que consiste num grafo $(V(G), E(G))$ denotando seus vértices e arestas (edges) e uma função $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que define o comprimento das arestas. Um linkage em d dimensões é $\mathcal{L} = (G, l)$ juntamente com a função $f : W \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida num subconjunto W de $V(G)$, que determina as coordenadas de vértices fixos em \mathbb{R}^d .*

Definição 3.2 Espaço de Configurações *Uma configuração C do linkage $\mathcal{L} = (G, l)$ em d dimensões é um mapa $C : V(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ que satisfaz as limitações de comprimento e vértices fixos. Isto é, se $(v, w) \in E(G)$ então $|C(v) - C(w)| = l(v, w)$. O conjunto de todas as configurações é chamada de espaço de configurações $Conf(\mathcal{L})$ de \mathcal{L} . Podemos pensar ainda uma configuração C de um n -vertex linkage (v_1, v_2, \dots, v_n) como um ponto em $(\mathbb{R}^d)^n$.*

Ainda é necessário formalizar a trajetória pela qual um vertex “traça” ou “desenha” uma curva:

Definição 3.3 *A trajetória de um vertex v de um linkage \mathcal{L} é a imagem de $Conf(\mathcal{L})$ sobre a projeção $tr_v : Conf(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $tr_v(C) = C(v)$. Um linkage \mathcal{L} “desenha” um conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ se há um vertex $v \in \mathcal{L}$ cuja trajetória é S . Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ é traçável se existe um \mathcal{L} que desenha S .*

3.1 O teorema da universalidade de Kempe e links elementares

Em seu trabalho, Kempe propõe e descreve uma série de links. De modo mais concreto, podemos escrever seu teorema para o plano afim:

Teorema 3.1 [Teorema da universalidade de Kempe] *Seja $f \in \mathbb{R}[x, y]$ um polinômio e B um disco fechado no plano; então existe um linkage que descreve o conjunto limitado $B \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$*

O resultado acima parte de uma curva f sobre o plano afim: $f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j = 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Em busca de um Linkage cuja trajetória de um de seus vertex trace uma determinada curva, a estratégia de Kempe se baseia no uso da trigonometria. Seja P ponto da curva acima. A primeira etapa da estratégia de Kempe se dá pela construção de um paralelogramo que tem a origem O e P como pontos. Tal paralelogramo define os ângulos θ e ϕ e podemos denotar P como: $x = m \cos \theta + n \cos \phi$ e $y = m \sin \theta + n \sin \phi$. Assim, podemos escrever f como $f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} (m \cos \theta + n \cos \phi)^i (m \sin \theta + n \sin \phi)^j = 0$, e realizando algumas simplificações (veja [4]) tem-se: $f(x, y) = \sum_{0 \leq s+t \leq n} D_{s,t} \cdot \cos(s\theta \pm t\phi + \Phi_{s,t}) + C$, onde $D_{s,t}$ e $\Phi_{s,t}$ são constantes.

Dessa maneira é interessante perceber que na nova equação os expoentes anteriores se tornam, na verdade, múltiplos dos ângulos θ e ϕ na equação trigonométrica de f . O linkage de uma curva se concretiza conforme construímos links que formam um ângulo de $(s\theta \pm t\phi + \Phi_{s,t})$ com o eixo x e são de tamanho $D_{s,t}$ para cada s, t . Fazemos o uso do multiplicador de ângulos para transformar $\theta \rightarrow s\theta$ e $\phi \rightarrow t\phi$ e o aditor de ângulos constrói $s\theta + t\phi + \Phi_{s,t}$. Dessa forma, a coordenada x será justamente dada por $D_{s,t} \cos(s\theta \pm t\phi + \Phi_{s,t})$. Esse processo é feito para cada par (s, t) presentes em (1) separadamente. Resta ao copiador de distâncias acoplá-los, construindo um ponto cuja coordenada x é exatamente $X = f(x, y) - C$ em (1). Por fim, se P se move ao longo de $f(x, y) = 0$ o ponto final de nosso linkage percorre a linha reta $X + C = 0$ e concretizamos tal movimento via um link de Peaucilier. Estes links elementares foram propostos por Kempe [5] cuja construção adotada neste estudo é detalhada em [6] e [4].

A demonstração rigorosa do Teorema 3.1 e 3.2 (corrigindo a feita originalmente por Kempe, em [5]) foi estudada via [6]. Há generalizações interessantes da demonstração também através de [7].

Utilizando o método proposto por Kempe, foi possível elaborar linkages para Cônicas e Cúbicas. Pode-se observar que as configurações e número de links são invariantes sob equivalência afim. Dentro da estratégia padrão, o número de links utilizados tem ligação direta com o número de termos resultantes na expressão final $f(x, y) = \sum_{0 \leq s+t \leq n} D_{s,t} \cdot \cos(s\theta \pm t\phi + \Phi_{s,t}) + C$ (veja [4]) que se mantém próxima para curvas de mesmo grau. Portanto, curvas limitadas a determinada região do plano pouco diferem de curvas ilimitadas de mesmo grau, uma vez que o método se propõe sempre a gerá-las num disco limitado B . Quanto às curvas racionais limitadas, há otimizações alcançáveis via métodos alternativos, como pode ser trabalhado em [8]. Veja a comparação abaixo entre cônicas:

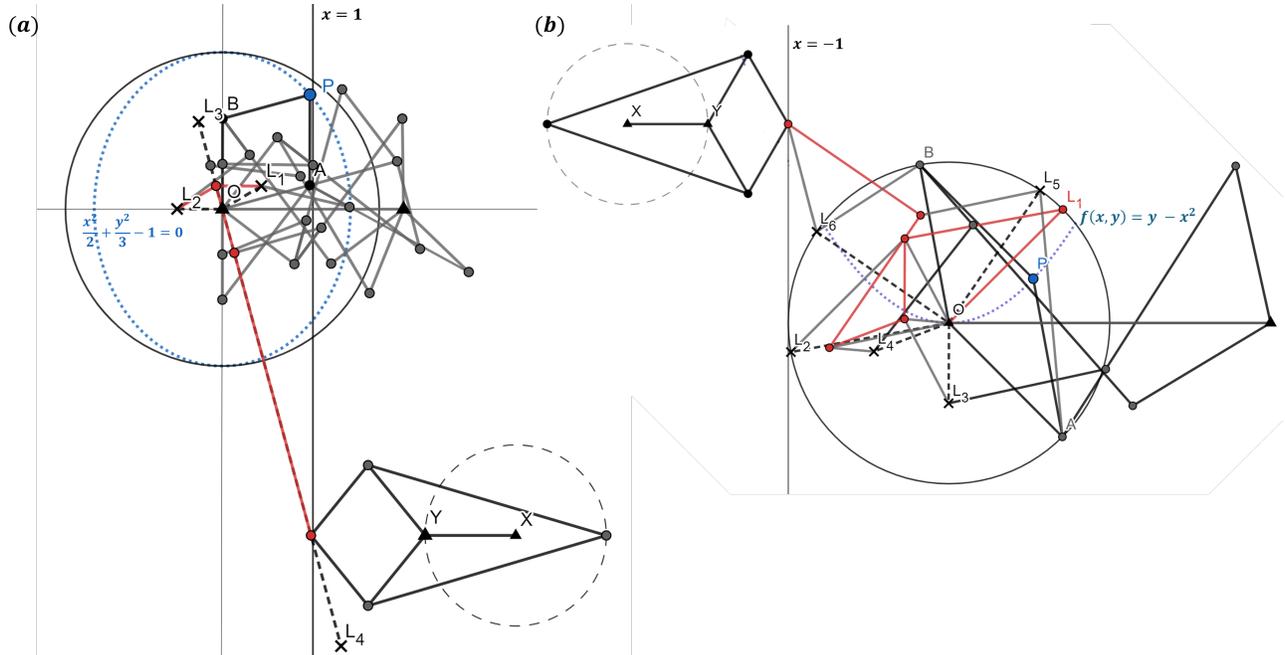


Figura 1: (a) Linkage completo para $g(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - 1$; (b) Linkage completo para $f(x, y) = x^2 - y$

Dentro das cúbicas, são necessários um número maior de multiplicadores de ângulo, e os linkages se mostraram de uma construção mais complexa. Já é possível observar tal mudança em $f(x, y) = y - x^3$,

como ilustramos abaixo:

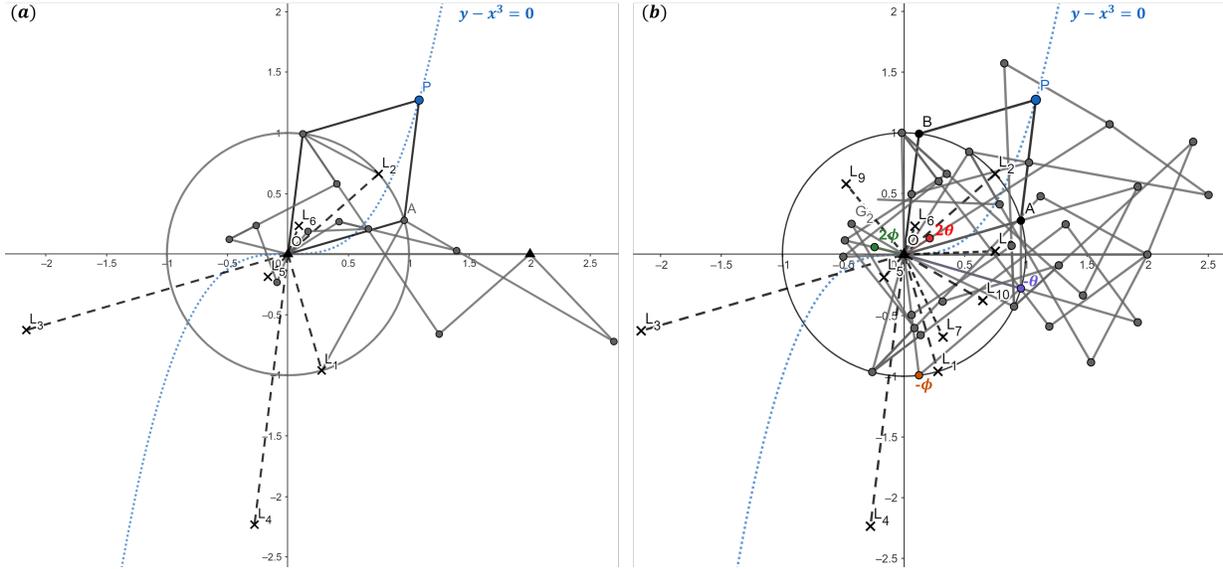


Figura 2: Linkage para $h(x, y) = y - x^3$ dividido em (a) Linkage para $L_1 - L_6$ (Multiplicadores de ângulo) e (b) Linkage para $L_7 - L_{10}$ (Aditores de ângulo, com $2\theta, 2\phi, -\theta$ e $-\phi$ indicados)

De maneira mais aprofundada, pode-se gerar também linkages para família de cúbicas como $h(x, y) = -y^2 + x^3 + \lambda x^2$. Cujos parâmetros λ determinam diferentes tipos de singularidades p e disposição de retas tangentes à p . Além disso, pode-se trabalhar com cúbicas com duas componentes; a título de exemplo, há $g(x, y) = y^2 - x^3 + \lambda x$. Nestes casos, são necessários dois linkages análogos (determinados pela mesma equação, atuando em regiões distintas do disco B), o fator mais agravante quanto ao número de links necessários. Para além disso, foi estudada a construção de um link com o intuito de unir os respectivos linkages de cada componente conexa, de modo que o sistema “desenha” uma componente ou a outra. Tal elaboração aumenta também o número de links resultante.

3.2 Curvas algébricas Reais e Aspectos Topológicos

Para dar início a esse estudo, podemos definir curvas algébricas reais sobre \mathbb{R}^2 e \mathbb{RP}^2 :

Definição 3.4 *Seja f polinômio com coeficientes reais e a classe de equivalência $f \in \mathbb{R}[x, y]/\mathbb{R}^*$, tal que $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) : f(x, y) = 0\}$ possui infinitos elementos; f é dita uma curva real afim. De modo análogo, dada F polinômio homogêneo real, $F \in \mathbb{R}[x, y, z]/\mathbb{R}^*$. Se $V_p(F) = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$ possuir infinitos elementos, então F é dita uma curva real projetiva.*

É necessário para esse estudo ainda trazer o foco ao que denotamos de “ramo” de curvas reais. Intuitivamente, dado $P \in V_p(F)$ como acima e $U \in \mathbb{RP}^2$ aberto suficientemente pequeno, um ramo em P é uma componente conexa do conjunto $V_p(F) \cap U$. Para melhor defini-lo podemos recorrer à seguinte formulação:

Definição 3.5 Dado um ponto $P \in \mathbb{RP}^2$ de uma curva real projetiva $F \in \mathbb{R}[x, y, z]/\mathbb{R}^*$, se as séries de potências

$$\rho_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \quad \rho_y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i, \quad \rho_z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$$

são convergentes para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, e tais que $\rho(0) = P, \rho(t) \in F, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, em que $\rho(t) = [\rho_x(t) : \rho_y(t) : \rho_z(t)]$, então $\rho((-\varepsilon, \varepsilon))$ é dito um ramo de F .

Fazendo uso de alguns conhecimentos prévios de Topologia Geral, mais especificamente acerca de Espaços de Recobrimento e Grupo fundamentais; pode-se verificar resultados como:

Teorema 3.2 O grupo fundamental de \mathbb{RP}^2 é \mathbb{Z}_2 .

O que nos dá abertura para o estudo de circuitos pares e ímpares em \mathbb{RP}^2 , e por fim, possivelmente relacionar o número e a paridade de circuitos às construções de linkages em \mathbb{R}^2 .

4 Conclusão

Neste projeto trabalhamos a partir de um resultado importante da cinemática planar, explorando sua generalidade sob a lente do estudo de curvas algébricas. Foi possível a implementação do método e o estudo dos principais resultados mais recentes acerca do Teorema da Universalidade de Kempe. Para além do trabalho envolvendo linkages, foi possível o estudo teórico de Curvas algébricas reais com enfoque também topológico.

Referências

- [1] Robert Bix, *Conics and Cubics, A concrete introduction to Algebraic curves*, Ed. 2, 2006.
- [2] David Cox, *Ideals, varieties and algorithms: An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Ed. 3, 2007
- [3] C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Algebraic Curves, An Undergraduate Introduction*, Cambridge University Press Ed. 1, 2001
- [4] X.S. Gao, C. Zhu, S.-C. chou, e J.-X. Ge; *Automated Generation of Kempe Linkages for Algebraic Curves and Surfaces*, Mechanism and Machine Theory, 36(9), (2002)
- [5] A.B. Kempe *On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork*, (1876).
- [6] T. G. Abbott, *Generalizations of Kempe's Universality Theorem*, Massachusetts Institute of Technology, 2008.
- [7] S.C. Power, *Elementary Proofs of Kempe Universality*, 2017]
- [8] Zijia Li, J. Schicho, H. P. Schrocker, *Kempe's Universality Theorem for Rational Space Curves*, 2018
- [9] Andreas Gathmann, *Plane Algebraic Curves*; Class Notes RPTU Kaiserslautern 2023