

Alguns resultados sobre o 16o Problema de Hilbert para ciclos limite algébricos

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas dinâmicos, ciclos limite, soluções periódicas

Autores

Helena Girardeli Simões Costa, IMECC - UNICAMP

Ricardo Miranda Martins, IMECC - UNICAMP

1 Introdução

O 16º Problema de Hilbert foi o principal tema abordado nesse projeto, tratando-se de um problema proposto em 1900 e que ainda está em aberto. O estudo foi voltado para alguns resultados parciais, para a história do problema e alguns conceitos básicos de equações diferenciais. O problema consiste no estudo do seguinte sistema, no qual P_n e Q_n são polinômios de grau n :

$$\begin{cases} x' = P_n(x, y), \\ y' = Q_n(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

A primeira parte do problema trata das posições relativas de ramos de curvas algébricas reais e a segunda parte, foco deste projeto, trata-se da determinação da quantidade máxima de ciclos limite que o sistema 1 pode ter. De forma geral o problema questiona de existe e se é possível determinar uma função $H(n)$ que dá uma quantidade máxima de ciclos limite do sistema 1 para cada n . Para o estudo da história do problema, que inclui propostas de diferentes autores para resultados parciais do problema, sendo que alguns deles foram inclusive contestados, foi usado como principal fonte o artigo [1]. Entre estes resultados parciais, foi estudado que qualquer conjunto de curvas fechadas simples que não se interceptam podem ser realizadas do ponto de vista topológico, utilizando o artigo [2]. Porém, antes de tudo isso, foi feita uma breve revisão sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias, utilizando-se do livro [3].

2 Resultados e discussão

A primeira parte do projeto focou em revisar sistemas de equações diferenciais lineares, montar o diagrama do traço-determinante e com isso determinar que $H(0) = H(1) = 0$. Em se tratando de sistemas de equações diferenciais, podemos tomar funções $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ com $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, e se considerarmos que x e y variam de acordo com o tempo $t \in \mathbb{R}$, temos o sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

A partir desse sistema, alguns teoremas e definições essenciais para o entendimento do 16º problema de Hilbert foram explorados.

Teorema 1 (Teorema de Existência e Unicidade). *Dado o sistema (2) com condição inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, então existe uma única solução que satisfaz a condição inicial.*

Dentre as definições necessárias, temos que uma curva parametrizada dada por um par de funções $\phi(t) = (x(t), y(t))$ é solução quando o par de funções resolvem a equação diferencial em um intervalo

$I \subset \mathbb{R}$, chamamos essa curva de **órbita**. Temos também que um **fluxo** é uma aplicação $\varphi : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$, com I contendo a origem, tal que $\varphi(t_0, (x_0, y_0)) = \phi(t_0)$ é a curva da solução que possui condição inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. A representação gráfica de um fluxo é chamada de **retrato de fase**.

Em particular, alguns sistemas admitem soluções periódicas, isto é, soluções que para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $T > 0$ tal que $x(t) = x(t + T)$ e $y(t) = y(t + T)$. Isto implica que $\phi(t)$ é uma curva fechada, uma vez que $\phi(t) = \phi(t + T)$, e portanto a chamamos de **órbita periódica**. Por fim chamamos uma órbita periódica de **ciclo limite** quando na sua vizinhança não existem outras órbitas periódicas.

Com todas essas definições foi possível começar a explorar sistemas de equações diferenciais lineares com objetivo de montar o diagrama do traço-determinante. Tomemos o sistema dado por $X' = AX$, sendo $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ e A sendo uma matriz real quadrada de ordem 2, com condição inicial $X(0) = (c_1, c_2)$. Essencialmente foram estudadas diferentes formas de resolver esse sistema dependendo do tipo de matriz A .

Se $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ diagonal então temos que a solução é dada por $\phi(t) = (c_1 e^{at}, c_2 e^{bt})$. Em outros casos, considerando a forma de Jordan de A , ainda é possível obter a forma geral da solução.

Finalmente foi possível montar o diagrama do traço-determinante, que se trata de um gráfico com o traço e o determinante de matrizes como variáveis e que serve para classificar as singularidades de um sistema. Dado um sistema $X' = AX$ com $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então temos que o seu polinômio característico é dado por $p(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$, sendo assim temos que os autovalores de A são dados por $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$. Com isso já podemos fazer a primeira divisão.

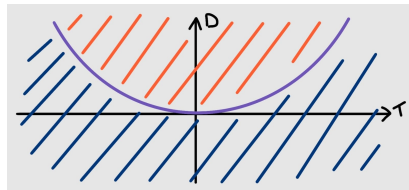


Figura 1: Em laranja temos a região onde $D > T^2/4$, em roxo $D = T^2/4$ e em azul $D < T^2/4$.

Agora tomando um exemplo é possível entender onde entram as singularidades, seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, com $x(0) = (c_1, c_2)$. Fazendo a decomposição de Jordan temos $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Com isso temos dois autovalores iguais, reais e positivos, portanto $\text{tr}(A) > 0$ e $\det(A) = \frac{\text{tr}(A)^2}{4}$. Por fim $\phi(t) = (c_1 e^t, c_2 e^t)$, o que nos dá o seguinte retrato de fase.

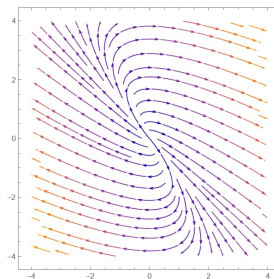


Figura 2: Retrato de fase de um nó repulsor degenerado.

Fazendo isso para todos os tipos de singularidades e avaliando onde se encaixam no gráfico finalmente temos o diagrama do traço-determinante.

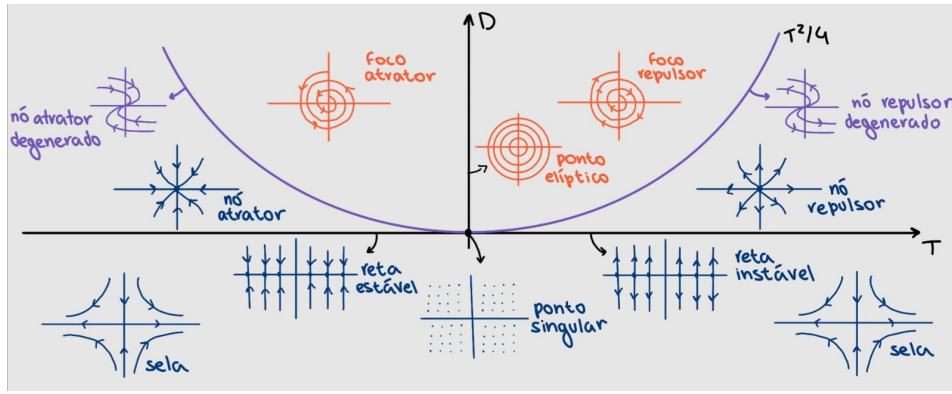


Figura 3: Diagrama com todas as singularidades. Em laranja temos a região onde $D > T^2/4$, em roxo $D = T^2/4$ e em azul $D < T^2/4$

Depois disso foi possível chegar a conclusão de que $H(0) = H(1) = 0$, lembrando que $H(n)$ diz respeito a quantidade de ciclos limite que um sistema do tipo 1 possui. Tomando $n = 0$ então temos que $x' = a$ e $y' = b$, com a, b constantes reais. Uma solução desse sistema pode ser dada por $\phi(t) = (c_1at, c_2bt)$, sendo a condição inicial $(x(0), y(0)) = (c_1, c_2)$. Veja que nesse caso não existe $T > 0$ tal que $\phi(t) = \phi(t + T)$ para algum $t \in \mathbb{R}$, o que significa que o sistema não possui órbita periódica e, conseqüentemente, não possui nenhum ciclo limite. Tomando agora $n = 1$ temos um sistema de equações de primeiro grau com duas variáveis, igual ao sistema representado pelo diagrama do traço-determinante. Observando o diagrama é possível perceber que o único sistema que possui órbitas periódicas é o do ponto elíptico, porém nesse caso todas as órbitas do sistema são periódicas, ou seja, nenhuma delas pode ser um ciclo limite. Sendo assim $H(0) = H(1) = 0$.

Com isso a parte mais simples do 16º problema de Hilbert foi finalizada. Em seguida foi estudada a história do problema e as descobertas feitas até agora. O primeiro resultado proposto foi feito por Dulac em 1923 que alegou ter provado que um sistema do tipo 1 possuía um número finito de ciclos limite. Em 1981 foi encontrado um erro na prova de Dulac. Na década de 80, Chen Lan-sun e Wang Ming-Shu encontraram um exemplo de um sistema de ordem 2 com 4 ciclos limite, de forma a afirmar que $H(2) \geq 4$. Por fim, em 1988 Lloyd, Blows e Kalenge chegaram que $H(3) \geq 6$. Esses então são alguns dos principais resultados relacionados ao problema.

Porém, um outro resultado foi estudado com mais aprofundamento, sendo este provar que qualquer conjunto de curvas fechadas simples e sem interseções podem ser realizadas topologicamente como ciclos limite de sistemas polinomiais.

De forma a facilitar a prova, consideremos o seguinte campo vetorial polinomial $X = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y} = (P, Q)$ análogo ao sistema 1. Além disso consideremos as definições.

Definição 2. Uma configuração de ciclos limite é dada pelo conjunto $C = \{C_1, \dots, C_2\}$ de curvas simples fechadas no plano tais que $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Definição 3. Uma curva C_i é primária se não existe nenhuma curva C_j de C contida na região delimitada por C_i .

Definição 4. Dizemos que X realiza a configuração C de ciclos limite se o conjunto de todos os ciclos limite de X é equivalente a C .

O problema foi então enunciado no seguinte teorema.

Teorema 5. Seja $C = \{C_1, \dots, C_2\}$ uma configuração de ciclos limite e seja r a quantidade de curvas primárias, então segue que

- A configuração C é realizável por um campo vetorial polinomial.
- A configuração C é realizável como ciclos limites algébricos por um campo vetorial polinomial de grau $\leq n + 2r - 1$.

A prova desse teorema consistiu em mostrar o item **b**, ou seja, achar uma expressão para o campo vetorial polinomial de grau $\leq n + 2r - 1$ e com isso o item **a** também já é provado. Além disso, o seguinte teorema foi utilizado para auxiliar a prova.

Teorema 6. *Seja X um campo vetorial C^1 definido em um aberto U . Seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ um fator integrante inverso de X . Se γ é um ciclo limite de X , então γ está contido em $\Sigma = \{(x, y) \in U / V(x, y) = 0\}$.*

Para começar a prova tomamos para cada curva primária C_j um ponto p_j em seu interior, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$. Além disso, conseguimos definir uma homotopia de forma que cada curva C_i fosse dada pelo círculo $f_i = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Por fim, dado que $p_j = (x_j, y_j)$ definimos as seguintes funções $f_{n+2j-1}(x, y) = (x - x_j) + i(y - y_j)$ e $f_{n+2j}(x, y) = (x - x_j) - i(y - y_j)$. Com tudo isso definimos a seguinte função, na qual $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, $\lambda_{n+2j-1} = 1 + i$ e $\lambda_{n+2j} = 1 - i \forall i \in \{1, \dots, r\}$.

$$\tilde{H} = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots f_n^{\lambda_n} f_n^{\lambda_{n+1}} \dots f_{n+2r-1}^{\lambda_{n+2r-1}} f_{n+2r}^{\lambda_{n+2r}} = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k}$$

Foi concluído, após algumas manipulações, que $\tilde{H}$ é uma função real, portanto passamos a manipular $H = \log \tilde{H}$, apenas para facilitar as contas. Com tudo isso definimos o campo vetorial $X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ tal que

$$P = -\left(\sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l\right)\right); Q = \left(\sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l\right)\right)$$

Tomando $V = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k$ temos que $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{Q}{V}$ e $\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{P}{V}$, ou seja, V é fator integrante inverso de X .

Vimos então que $V(x, y) = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k(x, y) = 0 \iff f_k(x, y) = 0$ para algum $k \in \{1, \dots, n+2r\} \iff (x, y) \in C_i$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ ou então $(x, y) = p_j$ para algum $j \in \{1, \dots, r\}$. Considerando o teorema 6, temos então que $\Sigma = (\bigcup_{i=1}^n C_i) \cup \{p_1, \dots, p_r\}$, ou seja, se γ é um ciclo limite de X então $\gamma = C_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Para finalizar a prova faltava só ver que todos os C_i na verdade eram ciclos limite, isso foi feito primeiro provando que eram órbitas periódicas, assumindo que existia uma singularidade de X em C_i para algum i e então caindo em uma contradição. Por fim assumimos, da mesma forma, que existia um C_i que não era ciclo limite, com isso teríamos uma órbita periódica γ' perto de C_i tal que $\gamma' \notin \{C_1, \dots, C_n\}$, mais uma vez, manipulando γ chegamos a uma contradição. Portanto, concluímos que os ciclos limite de X eram dados pela configuração $C = \{C_1, \dots, C_2\}$ e da definição 4 se provou o teorema.

Por fim foi estudado um exemplo, tirado do artigo [4], de um sistema de grau $n = 3$ que possui dois ciclos limite algébricos. Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = y(a^2 - r^2 - 3ax + 3x^2 - ay + 2xy + y^2). \\ y' = -a^2x + 3ax^2 - 2x^3 - r^2y + axy - x^2y + y^3 \end{cases} \quad (3)$$

com a condição $r < a/2$. Os dois ciclos limite algébricos são dados por $x^2 + y^2 = r^2$ e $(x - a)^2 + y^2 = r^2$. Foi então tomado $a = 1$ e $r = 1/3$.

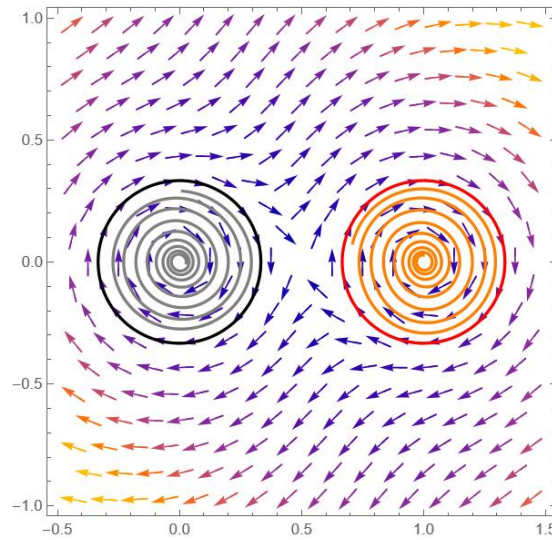


Figura 4: Campo de direções do sistema 3. Os ciclos limite são os círculos $x^2 + y^2 = r^2$ e $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ em preto e vermelho respectivamente, com $a = 1/3$ e $r = 1$. Órbitas não periódicas do sistema em cinza e laranja.

3 Conclusão

De forma geral, apesar de se tratar de um problema que não possui solução até hoje, foi possível extrair diversos conhecimentos a respeito de sistemas de equações diferenciais e sistemas dinâmicos, além de explorar recursos computacionais, a fim de ajudar na visualização desses sistemas. Além disso, foi possível explorar a história do problema e como ao longo das décadas a comunidade científica pode colaborar tanto para propor soluções quanto para questioná-las.

4 Bibliografia

Referências

- [1] Yulij Ilyashenko. Centennial history of hilbert's 16th problem. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, 39(3):301–354, 2002.
- [2] Gerardo Rodríguez Jaume Llibre. Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields. *Journal Differential Equations*, 2003.
- [3] Perko Lawrance. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, third edition, 2001.
- [4] Natalia Sadovskia Jaume Llibre, Rafael Ramírez. On the 16th hilbert problem for algebraic limit cycles. *Journal of Differential Equations*, 248:1401–1409, 2010.