



Estudo de sistemas lineares invariantes no tempo com parâmetros incertos

Palavras-Chave: SISTEMAS DINÂMICOS, ESTABILIDADE, INCERTEZAS

Autores:

Hugo de Negreiros Moura, FEM, UNICAMP

Prof. Dr. J. F. Camino (Orientador), FEM, UNICAMP

1 Introdução

Nos últimos anos, a análise de estabilidade de sistemas mecânicos tem se destacado como uma área crucial de pesquisa devido à sua aplicabilidade em uma variedade de campos, principalmente no projeto de controladores. Garantir a estabilidade de um sistema de controle exige conhecimento preciso do dispositivo. Contudo, é impossível medir com exatidão os parâmetros físicos, devido a erros de medição e incertezas nos próprios parâmetros. Assim, analisar a estabilidade de sistemas mecânicos com parâmetros incertos é essencial para assegurar desempenho seguro e eficiente. Para a análise dos parâmetros incertos neste projeto, são consideradas duas modelagens de incerteza: as incertezas intervalares, em que os parâmetros variam dentro de limites definidos, e as incertezas politópicas, que correspondem a combinações convexas de valores extremos.

Com foco específico em equações diferenciais com coeficientes incertos, incluindo incertezas intervalares e politópicas, essenciais na modelagem de sistemas aeroespaciais, automotivos e de controle de processos, o trabalho estudará a análise de incerteza desses sistemas através da formulação matemática dessas equações. Para esse estudo, os softwares MATLAB e Mathematica foram utilizados para cálculos numéricos e simbólicos e também para visualizar graficamente os efeitos das incertezas, que podem surgir devido a variações de processo, imprecisões de medição ou perturbações externas. Consequentemente, essas incertezas impactam diretamente a operação e a segurança dos sistemas. A análise dessas incertezas é vital para desenvolver tecnologias mais robustas e confiáveis e para prevenir falhas críticas em missões.

Este projeto se concentra na aplicação de técnicas analíticas e numéricas, como o Teorema de Lyapunov e o método *Root Locus*, para explorar como as incertezas dos parâmetros afetam a estabilidade dos sistemas dinâmicos. O

Teorema de Lyapunov oferece condições de estabilidade usando funções de energia, enquanto o método *Root Locus* permite a visualização gráfica da localização das raízes da equação característica do sistema em relação a variações dos parâmetros incertos.

2 Objetivos

Este projeto tem como objetivo compreender a formulação matemática de equações diferenciais ordinárias com coeficientes incertos, com foco nas incertezas intervalares e principalmente politópicas.

O projeto também estuda métodos de estabilidade como *Root Locus* e o Método de Lyapunov, aplicando essas técnicas em simulações numéricas, usando MATLAB e Mathematica para modelar sistemas físicos com incertezas e visualizar o comportamento das soluções.

3 Revisão bibliográfica

Os estudos em estabilidade robusta originam-se das análises matemáticas de autores como Kharitonov, que, já na década de 60, investigou a estabilidade de polinômios característicos associados a equações diferenciais lineares com parâmetros incertos. Em 1978, Kharitonov, em seu trabalho seminal [1], propôs um teorema essencial para garantir a estabilidade de polinômios cujos coeficientes variam dentro de um intervalo especificado.

Durante os anos 80, a pesquisa em sistemas incertos intervalares evoluiu com contribuições de [2], que inicialmente aplicaram modelos intervalares para analisar a incerteza nos coeficientes. Em [3], foi demonstrado que intervalos poderiam ser representados como politopos, com vértices nos extremos do intervalo e que a checagem de estabilidade nesses extremos é suficiente para garantir estabilidade do politopo inteiro. Essa transição para a modelagem politópica permitiu a aplicação de técnicas avançadas para verificar a estabilidade de polinômios característicos,

como ilustrado em [4].

Na década de 1990, a análise de estabilidade sob incertezas politópicas continuou a expandir, como apresentado em [5], que aplicaram técnicas de estabilidade de Lyapunov a esses sistemas. Concomitantemente, [6] explorou a aplicação conjunta do teorema de Kharitonov e do método de Lyapunov para sistemas incertos. Observou-se uma tendência clara de evitar a incerteza intervalar, com uma preferência marcada pela modelagem politópica. Paralelamente, pesquisas que dão continuidade à abordagem polinomial de Kharitonov, como [7], continuam relevantes, apesar da preferência pela abordagem politópica no contexto de incertezas paramétricas.

No início dos anos 2000, ocorreram contribuições significativas de pesquisadores brasileiros [8], que usaram LMI (Linear Matrix Inequalities) para sistemas incertos. Entre 2004 e 2006, os trabalhos [9, 10] continuaram a explorar a estabilidade em sistemas incertos, focando principalmente no método de Lyapunov. Seus trabalhos refinaram as técnicas existentes, contribuindo para a eficácia e aplicabilidade da abordagem.

Na década de 2010, observou-se uma diversificação nas abordagens de análise de estabilidade. O trabalho [11] retomou a análise através de polinômios característicos, aplicando o teorema de Kharitonov em contextos modernos. Paralelamente, o trabalho [12] continua a fornecer técnicas baseadas em LMI e no método de Lyapunov.

Atualmente, a importância dessa linha de pesquisa persiste, como demonstram estudos recentes sobre a estabilidade de polinômios característicos com coeficientes incertos como [13], que investiga a estabilidade de Hurwitz de uma família de polinômios.

Esses trabalhos sublinham a relevância contínua do estudo de sistemas incertos para abordar desafios modernos em controle e engenharia, propiciando ferramentas cada vez mais sofisticadas para garantir a estabilidade robusta em aplicações práticas.

Dentro desse contexto, esta pesquisa aborda duas formulações clássicas de análise de estabilidade propostas na literatura citada. O Método de Lyapunov para sistemas lineares incertos com coeficientes constantes é uma condição suficiente, mas não necessária, de estabilidade. Dessa forma, diversos autores tentaram ao longo de anos encontrar formulações para o teste nos vértices de um politopo que diminuíssem o conservadorismo do método.

Outra forma de diminuir o conservadorismo pode ser vista no Lema 1 de [8], onde há LMI's com condições diferentes da abordada na proposição 1 de [5], por exemplo. As LMI's citadas são a formulação mais clássica no estudo de estabilidade de sistemas lineares incertos na forma politópica, enquanto [8] mostra que a forma proposta por ele é, no mínimo, equivalente à clássica. Essa prática é comum aos artigos estudados, já que, para aprimorar o uso

do método de Lyapunov, é necessário buscar LMI's menos conservadoras.

4 Metodologia

Nesta seção, serão explicados os métodos empregados (*Root Locus* e Método de Lyapunov).

Além disso, uma modelagem matemática dos coeficientes incertos presentes nas equações estudadas foi amplamente discutida. As próximas subseções apresentam essa modelagem das incertezas, além dos métodos de verificar a estabilidade desses sistemas.

4.1 Coeficientes Incertos

Seja p um dos coeficientes invariante no tempo de um sistema qualquer. Esse parâmetro é incerto se

$$p \in [p_{\min}, p_{\max}] \quad (1)$$

As incertezas nos coeficientes das equações diferenciais serão modeladas matematicamente como segue. As incertezas intervalares serão representadas por intervalos fechados, em que os coeficientes podem assumir qualquer valor dentro desses intervalos. Por exemplo, a modelagem de um coeficiente incerto p pode ser expressa como:

$$p = p_0 + \delta_p, \quad \delta \in [-\epsilon, \epsilon] \quad (2)$$

em que p_0 é o valor nominal de p e ϵ define a magnitude da incerteza permitida.

As incertezas politópicas serão descritas por conjuntos convexos formados pela combinação convexa de vértices conhecidos. A representação de um coeficiente incerto politópico p pode ser dada por:

$$p = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (3)$$

em que p_i são os vértices que definem o politopo e α_i são os coeficientes da combinação convexa, garantindo que todos os valores de p permaneçam dentro do conjunto definido pelos vértices $[p_{\min}, p_{\max}]$.

As formas de modelagem citadas são equivalentes e no projeto foi provado e verificado esse fato. Logo, é possível escrever, seja $A(p) = A(\alpha)$ uma matriz de coeficientes incertos afim, que

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (4)$$

em que p é o vetor formado pelos vários p_i dos quais a matriz A depende. Assim, pode-se tratar um problema intervalar através do politopo equivalente, como é feito em diversos artigos estudados.

4.2 Root Locus

Na análise de sistemas incertos, pode-se usar uma análise numérica exaustiva (força bruta) e calcular para cada valor do parâmetro incerto, os autovalores da matriz de

coeficientes e verificar graficamente se algum tem sua parte real positiva. Porém, por conta da alta demanda computacional, outras abordagens se mostram mais eficientes.

Para ilustrar esse método, construíram-se gráficos que mapeiam os autovalores de matrizes que dependem de forma afim de parâmetros incertos. As figuras 1 e 2 representam, respectivamente, os autovalores das matrizes

$$A_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 8 & -4 + 7\alpha & 3\alpha \\ -3\alpha & 1 - 2\alpha & 4 \\ 5\alpha & -2\alpha & -7 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A_2(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} -8 & 7\alpha_1 - 7\alpha_2 & 3\alpha_1 \\ -3\alpha_1 + 4\alpha_2 & -2\alpha_1 + \alpha_2 & 4 \\ 5\alpha_1 & -2\alpha_2 & -7 \end{bmatrix}$$

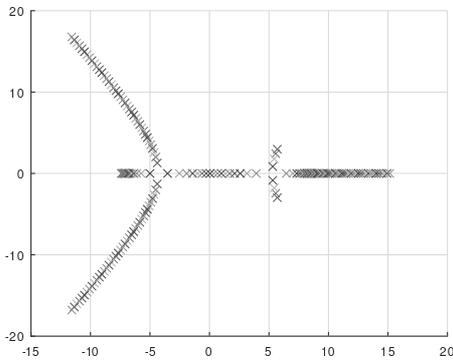


Figura 1: Autovalores da matriz $A_1(\alpha)$

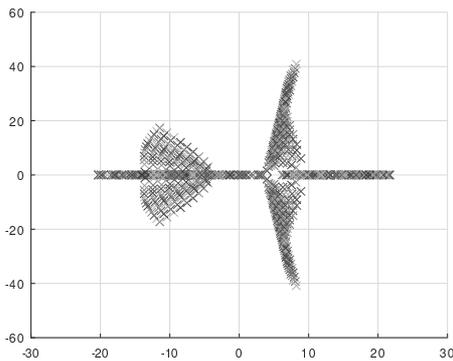


Figura 2: Autovalores da matriz $A_2(\alpha_1, \alpha_2)$

Nesses gráficos, é possível ver que, com a variação dos parâmetros, surgiu instabilidade no sistema, já que os autovalores estavam no semiplano complexo esquerdo e passaram para o semiplano direito para algum valor, até então não conhecido, dos parâmetros.

De forma alternativa, pode-se adaptar a teoria clássica de *Root Locus* de tal forma que seja possível provar a estabilidade desses sistemas usando este método. Classicamente, o método permite visualizar como os polos de um

sistema linear com realimentação (feedback) variam de acordo com mudanças nos parâmetros do sistema.

Porém, supondo que o objetivo é usar o método de *Root Locus* para visualizar a posição dos polos com a variação, não do ganho, mas de um parâmetro da própria equação que é incerto, ou seja, deseja-se entender para quais valores possíveis assumidos por um parâmetro da equação o sistema é estável.

Peguemos como exemplo uma equação de segunda ordem na forma padrão

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = f(t) \quad (6)$$

Sabe-se que esse sistema tem função de transferência

$$G(s) \equiv \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7)$$

Fazendo um diagrama de blocos do sistema com o ganho K , pode-se escrever a equação característica do sistema com ganho

$$1 + KH(s) = 0 \quad (8)$$

Neste contexto, K representa um parâmetro incerto da dinâmica, isolado como fator escalar na função de transferência. Dessa equação, conhecendo o sistema ($H(s)$), é possível usar o método de *Root Locus* no sistema com o ganho e verificar sua estabilidade com a variação do ganho.

Desse modo, suponha que ζ seja um parâmetro constante cujo valor exato seja desconhecido. É de grande utilidade entender como os autovalores do sistema de segunda ordem variam ao variar ζ nos reais.

Observe que, se a função de transferência $G(s)$ puder ser expressa como um sistema com ganho K , é possível aplicar o método *Root Locus*. Note que agrupando os termos da equação característica do sistema de $G(s)$ que contém ζ e dividindo a equação pelos termos restantes, tem-se

$$s^2 + \omega_n^2 + \zeta 2\omega_n s = 0$$

$$1 + \zeta \frac{2\omega_n s}{s^2 + \omega_n^2} = 0 \quad (9)$$

E chamando o termo que multiplica ζ de $H(s)$, ou seja, a nova função de transferência do sistema, pode-se usar o método de *Root Locus* de forma semelhante à sua formulação clássica, em que ζ faz o papel do ganho K

$$1 + \zeta H(s) = 0 \quad (10)$$

Para exemplificar o método, faz-se um *Root Locus* do sistema de segunda ordem com $\omega_n = 5$ e ζ incerto. A construção do *Root Locus* segue a teoria clássica, sendo visualizada por meio do gráfico dos polos do sistema gerado no MATLAB.

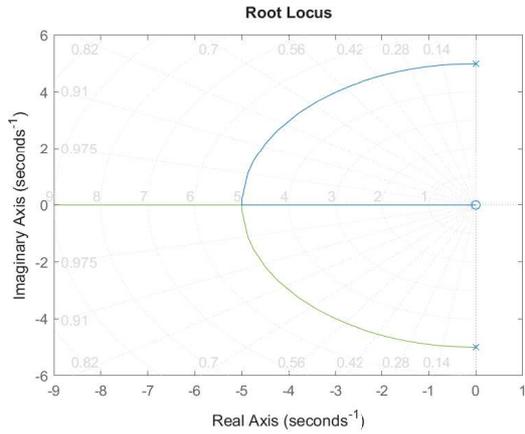


Figura 3: Root Locus de $p(s)$

Repare que, como $\zeta > 0$, o sistema é estável para qualquer valor assumido pelo parâmetro, já que os autovalores sempre estão na esquerda do plano complexo.

O método pode ser aplicado a sistemas de qualquer ordem, porém é limitado quanto à quantidade de parâmetros incertos presentes. Usando a teoria clássica, pode-se provar a estabilidade apenas de sistemas com um único parâmetro incerto. Desse modo, apesar das vantagens em relação ao método numérico de checagem de autovalores, apresenta uma limitação quanto ao número de parâmetros incertos da equação.

4.3 Método de Lyapunov

O Método de Lyapunov é uma técnica eficaz para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos, inclusive aqueles com diversos parâmetros incertos. Considere uma equação diferencial da forma

$$\dot{x} = Ax \quad (11)$$

em que A é uma matriz com parâmetros incertos. O Método de Lyapunov consiste em encontrar uma função escalar $V(x)$, chamada de função de Lyapunov, que satisfaça as seguintes condições:

$$V(x) > 0 \quad \text{e} \quad \dot{V}(x) < 0 \quad (12)$$

Uma escolha comum para a função de Lyapunov é:

$$V(x) = x^T P x \quad (13)$$

sendo P uma matriz simétrica positiva definida. A derivada temporal de $V(x)$ pode ser calculada como:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x \quad (14)$$

A estabilidade do sistema é garantida se a condição

$$A^T P + P A < 0 \quad (15)$$

for válida para todos os $x \neq 0$ e for atendida para todos os possíveis valores dos parâmetros incertos.

Para o caso em que A é uma matriz politópica, podem-se propor diferentes estruturas para P e a condição de Lyapunov nos vértices desse politopo. Assumindo uma P constante, pode-se escrever o seguinte conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMI's):

$$P > 0 \quad (16)$$

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, q$$

em que q é o número de vértices do politopo. Nota-se que, com P constante, sempre haverá $q + 1$ LMI's como condição suficiente de estabilidade.

Agora, pode-se propor uma matriz P politópica, com mesma quantidade de vértices que A . Veja que, esta proposta aparenta ser menos conservadora, já que o programa terá q matrizes P para provar a estabilidade do politopo, ao invés de uma, como no caso anterior. Para P politópicas, há diversos conjuntos de LMI's possíveis, com graus de conservadorismo diferentes entre si. O conjunto de LMI's clássico para esse caso, aqui nomeado de "Forma 1", é dado por

$$P_i > 0, \quad A_i^T P_j + P_j A_i < 0 \quad (17)$$

$$i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, q$$

Outra forma, proposta no Lema 1 de [8], denominada aqui "Forma 2", é definida por

$$P_i > 0, \quad A_i^T P_i + P_i A_i < -I$$

$$A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j < \frac{2}{q-1} I \quad (18)$$

$$i = 1, \dots, q-1, \quad j = i+1, \dots, q$$

Dessa forma, foram implementadas as 3 estruturas de P no MATLAB, usando o pacote YALMIP e os solvers de LMI's Sedumi e SDPT3, para diminuir os erros numéricos.

Feita a implementação dos conjuntos de LMI's, pode-se fazer uma comparação estatística do conservadorismo de cada forma de P , para tentar entender qual estrutura consegue provar a estabilidade de mais sistemas, e se alguma das estruturas prova todos os sistemas provados por outra, além de outros sistemas que a estrutura mais conservadora falhou em provar estabilidade.

5 Resultados Obtidos

Nesta seção, faz-se uma comparação entre as proposições de estruturas de P apresentadas anteriormente usando os dados obtidos dos códigos implementados.

Foram feitos os testes em 7800 sistemas, em que a dimensão n das matrizes varia de 2 até 7 ($n = 2, \dots, 7$) e em cada dimensão são feitos 200 testes em cada quantidade de vértices, sendo que este varia de 2 até $n + 3$ para o n definido ($q = 2, \dots, n + 3$). Dessa forma, obtêm-se dados com várias dimensões e quantidade de vértices. Do tratamento dos dados, conclui-se:

Solver	Forma 1	Forma 2	P constante
SEDUMI	1434	2146	2146
SDPT3	1437	2221	2221

Casos provados por todas as estruturas: SEDUMI 1434, SDPT3 1437

Veja que, o conjunto de intersecção entre os sistemas que tiveram sua estabilidade provada pela forma 1, 2 e P constante simultaneamente dista somente 3 casos (somente quando usa-se o Sedumi) do que foi provado pela forma 1 isoladamente. Verificando esses casos que des-toam, percebe-se que a solução concedida pelo Sedumi alega erro numérico para a forma 2 e para P constante. Logo, todos os casos "bem-sucedidos" numericamente que a forma 1 e P constante provaram estabilidade, a forma 2 também foi capaz de provar.

O SDPT3, por outro lado, teve menos erros numéricos e mostrou mais casos resolvidos pela forma 2 e não mostrou incoerência nas estatísticas.

Além disso, vale reparar que a forma 1 e o uso de P constante levam ao mesmo número e conjunto de LMI's com estabilidade provada. Logo, há um forte indício de quem sejam propostas de P igualmente conservadoras e, portanto, idênticas.

Observa-se também que a Forma 2, proposta m [8], mostrou-se significativamente mais eficaz em provar a estabilidade de sistemas politópicos, abrangendo todos os casos cobertos pelas outras formulações e provando estabilidade para uma gama maior de sistemas. Portanto, há fortes indícios de que o conjunto de LMI's propostas por Ramos seja menos conservador que o conjunto de LMI's clássicas e que o conjunto de sistemas com estabilidade provada por elas englobe o conjunto de sistemas com estabilidade provada pelas LMI's clássicas.

6 Conclusão

O estudo desenvolvido permitiu uma análise aprofundada da estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo com parâmetros incertos, destacando a importância de abordagens robustas em projetos de controle. A aplicação conjunta dos métodos de *Root Locus* e de Lyapunov — especialmente na formulação via LMI — mostrou-se eficaz na identificação de condições suficientes de estabilidade. Os resultados obtidos evidenciaram o potencial da estrutura politópica proposta por Ramos e Peres, por apresentar menor conservadorismo em relação às formas clássicas. Além disso, a comparação sistemática entre diferentes estruturas validou a robustez computacional da abordagem, mesmo sob variações na dimensão do sistema e número de vértices. Dessa forma, o projeto não apenas reforça a relevância de técnicas formais no estudo de sistemas incertos, como também contribuiu para o avanço da análise numérica e da interpretação crítica de modelos dinâmicos na engenharia.

Referências

- [1] V. L. Kharitonov, "The asymptotic stability of the equilibrium state of a family of systems of linear differential equations," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 14, no. 11, pp. 2086–2088, 1978.
- [2] B. R. Barmish, "Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 10, pp. 935–936, 1984.
- [3] B. R. Barmish, M. Fu, and S. Saleh, "Stability of a polytope of matrices: counterexamples," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 6, pp. 569–572, 1988.
- [4] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and H. Lin, "Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 61–71, 1988.
- [5] H. Kokame, H. Kida, and T. Mori, "A polytopic quadratic Lyapunov functions approach to stability of a matrix polytope," in *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, (Honolulu, Hawaii), pp. 3500–3505, Dec. 1990.
- [6] M. M. Mansour and B. D. O. Anderson, "Kharitonov's theorem and the second method of Lyapunov," *Systems & Control Letters*, vol. 20, no. 1, pp. 39–47, 1993.
- [7] A. Datta and S. P. Bhattacharyya, "On determining the δ and θ Hurwitz stability of interval polynomials," in *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, (Chicago, IL, USA), pp. 2396–2398, June 1995.
- [8] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres, "An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 4, pp. 675–678, 2002.
- [9] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and J.-B. Lasserre, "On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems," in *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, (Nassau, Bahamas), pp. 887–892, Dec. 2004.
- [10] J. C. Geromel and P. Colaneri, "Robust stability of time varying polytopic systems," *Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 1, pp. 81–85, 2006.
- [11] Y. V. Hote, J. R. P. Gupta, and D. R. Choudhury, "Kharitonov's theorem and Routh criterion for stability margin of interval systems," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 647–654, 2010.
- [12] G. Chesi, "Exact robust stability analysis of uncertain systems with a scalar parameter via LMIs," *Automatica*, vol. 49, no. 4, pp. 1083–1086, 2013.
- [13] G. Oaxaca-Adams, R. Villafuerte-Segura, and B. Aguirre-Hernández, "On Hurwitz stability for families of polynomials," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 34, no. 7, pp. 4576–4594, 2024.