

ANÁLISE DINÂMICA DE TRANSMISSÃO PLANETÁRIA

Palavras-Chave: PLANETÁRIA, MODELO NUMÉRICO, ANÁLISE DINÂMICA

Autores(as):

GUILHERME MONTEIRO RIBEIRO, FEM, UNICAMP

Prof. Dr. GREGORY BREGION DANIEL, FEM, UNICAMP

INTRODUÇÃO:

As transmissões planetárias têm se destacado como elementos fundamentais em sistemas de transmissão de potência devido à sua elevada densidade de torque, geometria compacta e versatilidade operacional. Esses sistemas são amplamente utilizados em aplicações automotivas, aeroespaciais, robóticas e em turbo máquinas, exigindo modelagens cada vez mais precisas para previsão de desempenho dinâmico, análise de vibrações e controle de estabilidade. Nesse contexto, o aprofundamento teórico sobre a modelagem dinâmica de transmissões planetárias se torna essencial para a compreensão dos efeitos associados à rigidez de engrenamento, folgas, excentricidades e forças giroscópicas, bem como para o desenvolvimento de modelos que considerem múltiplos graus de liberdade.

Nos últimos anos, diversos estudos têm contribuído significativamente para o aprimoramento desses modelos. Os trabalhos de Xiao et al. (2020), Yang et al. (2023), Liu et al. (2023) e Hu et al. (2022) propõem formulações avançadas que incorporam efeitos não lineares, modelos tridimensionais de contato entre os dentes, desacoplamentos induzidos por excentricidade e variações de rigidez ao longo do ciclo de engrenamento. A análise desses modelos permite não apenas entender a dinâmica dos componentes individuais, como o anel, os satélites, o sol e o porta-satélites, mas também como suas interações resultam em equações de movimento acopladas e sensíveis a variações de carga e velocidade.

Este trabalho tem como objetivo realizar uma revisão crítica e comparativa dessas abordagens, destacando as principais configurações estruturais consideradas, os parâmetros físicos incorporados e os efeitos dinâmicos analisados. Tal esforço visa estabelecer uma base conceitual sólida para futuras implementações numéricas e simulações de desempenho dinâmico de transmissões planetárias complexas. O sistema analisado neste estudo considera uma configuração com três engrenagens planetárias, resultando em um modelo com 18 graus de liberdade, que contempla tanto os movimentos translacionais quanto rotacionais dos principais componentes, sol, planetas, anel e braço, permitindo uma representação abrangente da dinâmica do sistema.

METODOLOGIA:

Com base nos modelos dinâmicos analisados na literatura, é possível formular equações de movimento que descrevem o comportamento dinâmico das transmissões planetárias considerando múltiplos graus de liberdade.

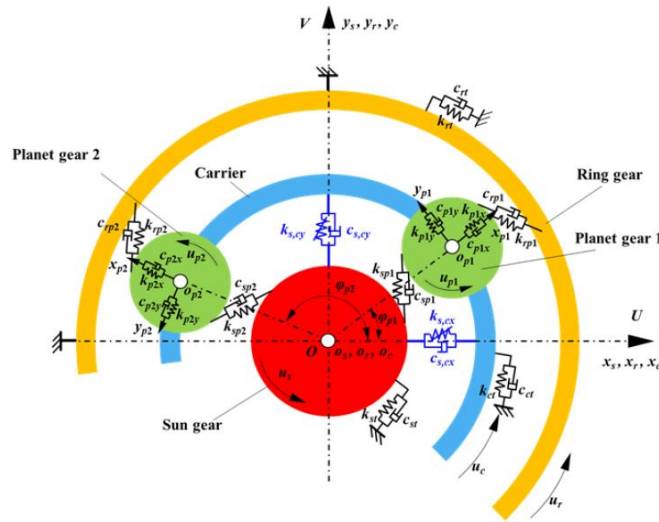


Figura 1 – Representação esquemática do modelo proposto

A partir do Diagrama de Corpo Livre e da formulação Lagrangiana, obtêm-se as equações de movimento. Os graus de liberdade (x, y, u) correspondem, respectivamente, às translações horizontal e vertical, e à rotação. Os subscritos (s, c, r, n) indicam, respectivamente, a engrenagem solar, o porta-planetas, a engrenagem anelar e as n engrenagens planetas. Os parâmetros k e c representam, respectivamente, a rigidez e o amortecimento nos engrenamentos ou mancais, e δ é a deformação associada.

As equações de movimento do componente sol são:

$$m_s \ddot{x}_s + k_{xs} x_s + c_{xs} \dot{x}_s = k_{sp_x} \delta_{sp} \sin(\varphi_{sp}) + c_{sp_x} \dot{\delta}_{sp} \sin(\varphi_{sp}) \quad (01)$$

$$m_s \ddot{y}_s + k_{ys} y_s + c_{ys} \dot{y}_s = k_{sp_y} \delta_{sp} \cos(\varphi_{sp}) + c_{sp_y} \dot{\delta}_{sp} \cos(\varphi_{sp}) \quad (02)$$

$$I_s \ddot{\theta}_s + c_{\theta s} \dot{\theta}_s + k_{\theta s} \theta_s = -(k_{sp} \delta_{sp} + c_{sp} \dot{\delta}_{sp}) r_s + T_s \quad (03)$$

As equações de movimento do braço:

$$m_c \ddot{x}_c + m_p (\ddot{x}_c + \ddot{x}_p + r_c \ddot{\theta}_c \cos\varphi - r_c \dot{\theta}_c^2 \sin\varphi) + c_{xc} \dot{x}_c + k_{xc} x_c = -(k_{sp} \delta_{sp} + c_{sp} \dot{\delta}_{sp}) \sin\varphi_{sp} - (k_{rp} \delta_{rp} + c_{rp} \dot{\delta}_{rp}) \sin\varphi_{rp} \quad (04)$$

$$m_c \ddot{y}_c + m_p (\ddot{y}_c + \ddot{y}_p - r_c \ddot{\theta}_c \sin\varphi - r_c \dot{\theta}_c^2 \cos\varphi) + c_{yc} \dot{y}_c + k_{yc} y_c = -(k_{sp} \delta_{sp} + c_{sp} \dot{\delta}_{sp}) \cos\varphi_{sp} - (k_{rp} \delta_{rp} + c_{rp} \dot{\delta}_{rp}) \cos\varphi_{rp} \quad (05)$$

$$(I_c + m_p r_c^2) \ddot{\theta}_c + c_{\theta c} \dot{\theta}_c + k_{\theta c} \theta_c = -m_p r_c (\ddot{x}_c \cos\varphi - \dot{x}_c \dot{\theta}_c \sin\varphi + r_c \ddot{\theta}_c + \ddot{y}_c \sin\varphi - y_c \dot{\theta}_c \cos\varphi + \ddot{x}_p \cos\varphi - \ddot{y}_p \sin\varphi - \dot{x}_p \dot{\theta}_c \sin\varphi - \dot{y}_p \dot{\theta}_c \cos\varphi) + (k_{sp} \delta_{sp} + c_{sp} \dot{\delta}_{sp}) [(x_s - x_p - x_c) \cos\varphi_{sp} + (y_c - y_p - y_s) \sin\varphi_{sp} + r_c] + (k_{rp} \delta_{rp} + c_{rp} \dot{\delta}_{rp}) [(x_c + x_p - x_r) \cos\varphi_{rp} + (y_c + y_p - y_r) \sin\varphi_{rp} - r_c] \quad (06)$$

As equações de movimento do anel:

$$m_r \ddot{x}_r + k_{xr} x_r + c_{xr} \dot{x}_r = -k_{rp_x} \delta_{rp} \sin(\varphi_{rp}) - c_{rp_x} \dot{\delta}_{rp} \sin(\varphi_{rp}) \quad (07)$$

$$m_r \ddot{y}_r + k_{yr} y_r + c_{yr} \dot{y}_r = k_{rp_y} \delta_{rp} \cos(\varphi_{rp}) + c_{rp_y} \dot{\delta}_{rp} \cos(\varphi_{rp}) \quad (08)$$

$$I_r \ddot{\theta}_r + c_{\theta r} \dot{\theta}_r + k_{\theta r} \theta_r = (k_{rp} \delta_{rp} + c_{rp} \dot{\delta}_{rp}) r_r + T_r \quad (09)$$

As equações de movimento do planeta:

$$m_p \ddot{x}_p + c_{xp} \dot{x}_p - c_{xp} \dot{x}_c + k_{xp} x_p - k_{xp} x_c = -m_p r_c \ddot{\theta}_c \cos \varphi + m_p r_c \dot{\theta}_c^2 \sin \varphi - (k_{sp} \delta_{sp} + c_{sp} \dot{\delta}_{sp}) \sin \varphi_{sp} + (k_{rp} \delta_{rp} + c_{rp} \dot{\delta}_{rp}) \sin \varphi_{rp} \quad (10)$$

$$m_p \ddot{y}_p + c_{yp} \dot{y}_p - c_{yp} \dot{y}_c + k_{yp} y_p - k_{yp} y_c = m_p r_c \ddot{\theta}_c \sin \varphi + m_p r_c \dot{\theta}_c^2 \cos \varphi - (k_{sp} \delta_{sp} + c_{sp} \dot{\delta}_{sp}) \cos \varphi_{sp} - (k_{rp} \delta_{rp} + c_{rp} \dot{\delta}_{rp}) \cos \varphi_{rp} \quad (11)$$

$$I_p \ddot{\theta}_p = -(k_{sp} \delta_{sp} + c_{sp} \dot{\delta}_{sp}) r_p - (k_{rp} \delta_{rp} + c_{rp} \dot{\delta}_{rp}) r_p \quad (12)$$

Para encontrar o deslocamento do engrenamento entre as engrenagens sol-planeta (δ_{sp}) e planeta-anel (δ_{rp}), tomou-se como base o seguinte esquema

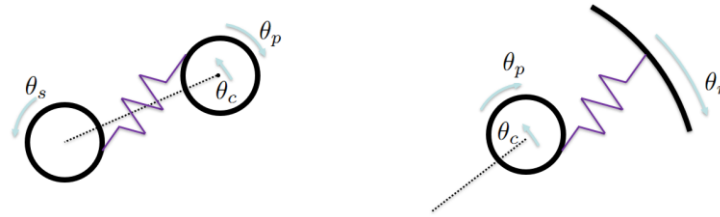


Figura 2 – Demonstração do deslocamento do engrenamento

Os deslocamentos encontrados foram os seguintes:

$$\delta_{rp} = r_p \theta_p - r_r \theta_r + r_c \theta_c + (x_r - x_p - x_c) \sin \varphi_{rp} + (y_c + y_p - y_r) \cos \varphi_{rp} \quad (13)$$

$$\delta_{sp} = r_s \theta_s - r_c \theta_c + r_p \theta_p + (x_c + x_p - x_s) \sin \varphi_{sp} + (y_c + y_p - y_s) \cos \varphi_{sp} \quad (14)$$

Os ângulos foram determinados projetando a linha de ação do engrenamento

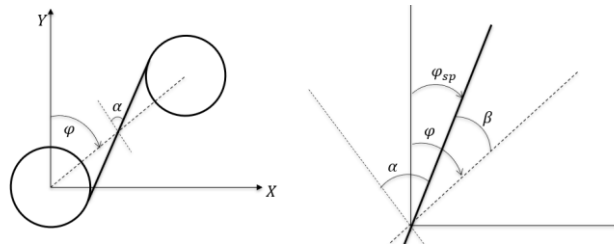


Figura 2 – Linha de ação do engrenamento

Então, α representa o ângulo de pressão das engrenagens, φ representa o ângulo de posição das engrenagens planetas, φ_{sp} representa ângulo da linha de ação do engrenamento sol-planeta e φ_{rp} representa ângulo da linha de ação do engrenamento anel-planeta, esse são ângulos são:

$$\varphi = \frac{2\pi(i-1)}{N} + \theta_c \quad (15)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (16)$$

$$\varphi_{sp} = \varphi + \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

$$\varphi_{rp} = \varphi - \alpha + \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

A partir das equações de movimento obtidas com base nos modelos estudados, desenvolveu-se um código computacional com o objetivo de simular e analisar a resposta dinâmica do sistema planetário. O modelo considera um sistema com 18 graus de liberdade, incluindo os deslocamentos translacionais e rotações relativas dos principais componentes, sol, planetas, anel e braço, permitindo capturar com maior fidelidade os efeitos de acoplamentos elástico-dissipativos, excitações externas e interação entre os corpos.

A formulação do modelo computacional permite a introdução de duas entradas independentes: uma aplicada ao braço e outra ao anel, representando diferentes condições de excitação ou torque de entrada. A saída do sistema é observada na engrenagem solar, cuja resposta dinâmica fornece informações sobre a transferência de energia e o comportamento vibracional do sistema. A metodologia adotada possibilita avaliar tanto as vibrações translacionais quanto as rotações induzidas pela excitação, além de permitir a identificação de frequências naturais e modos de vibração

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

O modelo dinâmico considera duas entradas independentes aplicadas ao sistema: uma no braço e outra na engrenagem anelar, enquanto a resposta do sistema é observada na engrenagem solar, caracterizando-a como a saída. Para a modelagem das restrições elásticas do sistema, assumiu-se que os mancais que suportam os movimentos translacionais das engrenagens sol, anel e planetas, bem como do braço, possuem rigidez constante de $k = 1 \times 10^8 \text{ N/m}$, em ambas as direções x e y.

Adicionalmente, as rigidezes dos pares de engrenamento foram consideradas constantes e iguais, com valores definidos como $k_{sp} = k_{rp} = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$, representando a rigidez de contato entre o sol e os planetas, e entre o anel e os planetas, respectivamente. Os demais parâmetros geométricos e inerciais utilizados na modelagem estão detalhados na Tabela 1.

Parâmetro	Sol	Anel	Braço	Planeta
Módulo [mm]	1,0	1,0	-	1,0
Ângulo de pressão [°]	20	20	-	20
Largura da face [mm]	10	10	-	10
Número de dentes	20	100	-	40
Massa [kg]	0,1	0,55	1,0	$6,69 \times 10^{-2}$
Momento polar de inércia [kg.m^2]	$1,5 \times 10^{-5}$	2×10^{-3}	4×10^{-3}	$1,25 \times 10^{-5}$

Tabela 1 – Parâmetros de entrada

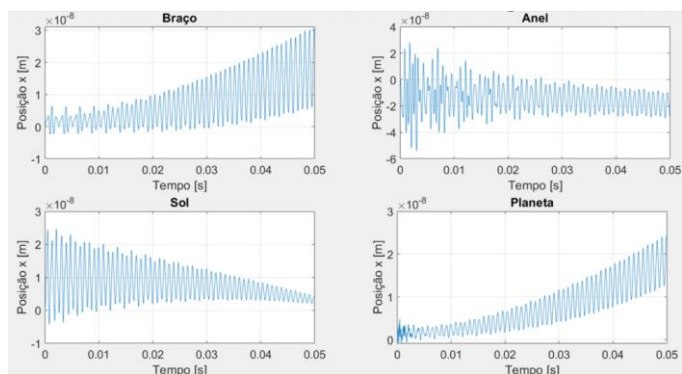


Figura 3 – Posição no eixo x dos componentes

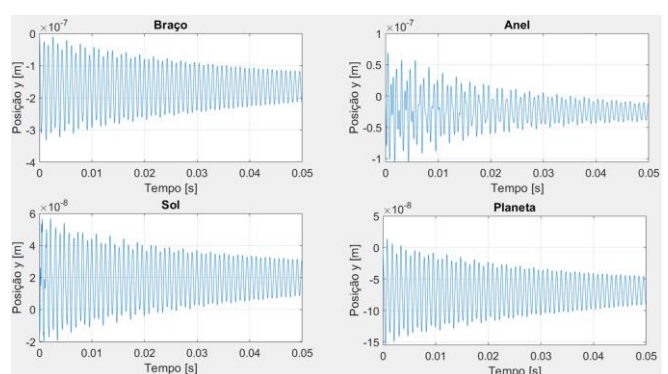


Figura 4 – Posição no eixo y dos componentes

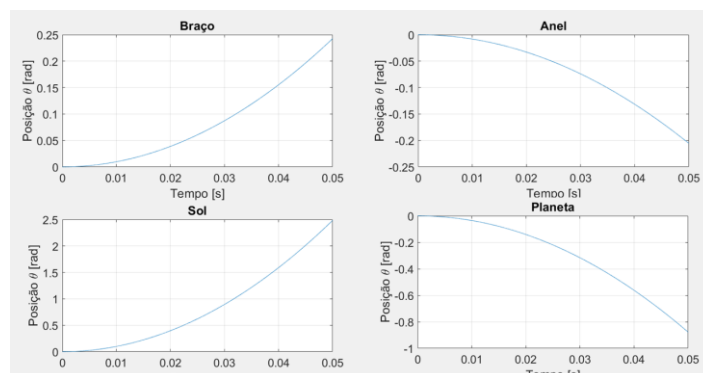


Figura 5 – Posição angular dos componentes

CONCLUSÕES:

Os resultados obtidos a partir da modelagem e simulação do sistema planetário com 18 graus de liberdade demonstram a coerência e robustez do modelo proposto. Ao se realizar uma análise paramétrica, elevando-se significativamente os valores das rigidezes translacionais dos mancais, observou-se que o comportamento dinâmico do sistema converge para aquele característico de um modelo puramente torcional. Essa equivalência é esperada, uma vez que, com a limitação dos deslocamentos lineares dos corpos, os graus de liberdade rotacionais passam a dominar a resposta do sistema, comportamento compatível com os modelos clássicos de transmissão planetária em regime torcional.

Além disso, ao longo das simulações, foi possível verificar que a relação de transmissão entre os componentes, sol, planetas, anel e braço, foi rigorosamente respeitada, conforme definido pela cinemática do sistema. A coerência entre o modelo cinemático e o modelo dinâmico reforça a validade da formulação matemática adotada e a fidelidade da implementação computacional.

Portanto, conclui-se que o modelo desenvolvido apresenta um comportamento físico consistente com os princípios da mecânica clássica e da teoria de engrenagens planetárias, sendo uma base sólida para investigações futuras envolvendo excitações não lineares, efeitos giroscópios, folgas e variações de rigidez ao longo do tempo.

BIBLIOGRAFIA

- Hu, J., Hu, N., Zhang, L., Yang, Y., & Luo, P. (2022). Vibration signal modeling of planetary gearbox based on dynamics and finite element method for tooth crack diagnosis. *Advances in Mechanical Engineering*, 14(7), 16878132221114720.
- Parker, R. G., & Lin, J. (2001). Modeling, modal properties, and mesh stiffness variation instabilities of planetary gears. Prepared for NASA (pp. 1-111). NASA/CR-2001-210939.
- Xiao, Z., Cao, J., & Yu, Y. (2020). Mathematical modeling and dynamic analysis of planetary gears system with time-varying parameters. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 1-9.
- Yang, X., Zhang, C., Yu, W., Huang, W., Xu, Z., & Nie, C. (2023). A Refined Dynamic Model for the Planetary Gear Set Considering the Time-Varying Nonlinear Support Stiffness of Ball Bearing. *Machines*, 11(2), 206.