

Maximização de rigidez e da sustentabilidade de treliças mistas (aço e madeira) usando otimização topológica

Palavras-Chave: Otimização estrutural-1, Pegada de Carbono -2, Métodos Evolucionários-3

Autores:

Samuel Rodrigues Coutinho Filho, FEM – UNICAMP

Prof. Dr. Renato Pavanello, FEM - UNICAMP

1. INTRODUÇÃO:

Neste trabalho, foi estudada a influência de materiais usados em estruturas treliçadas. Buscou-se conciliar a eficiência estrutural e a sustentabilidade da produção dos materiais utilizados na treliça [1], a fim de obter um ecodesign eficiente. Para isso, foram utilizados métodos numéricos e computacionais, como o Método dos Elementos Finitos e a Otimização Topológica, aplicados em MATLAB.

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS:

Aplicou-se o Método dos Elementos Finitos, com forma fraca da equação via Galerkin [2], para resolver a equação diferencial de um elemento de barra. Após isso, multiplica-se uma matriz de transformação de coordenadas para que as variáveis nodais estejam em um sistema global de coordenadas, então, obtém-se a seguinte matriz rigidez para cada elemento, em que “c” é o cosseno do ângulo de inclinação do elemento, “s” é o seno, “A” é a área, “E” o módulo de Young e “L” o comprimento:

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Em posse da matriz rigidez de cada elemento da treliça, é possível alocá-las em uma matriz rigidez global, formando assim um sistema que descreve toda a estrutura. A matriz **K** é a matriz rigidez global, **u** armazena os deslocamentos nodais, e **f** é o vetor com as forças internas de cada nó. A equação global matricial é mostrada a seguir:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$$

Com isso, conhecendo-se o carregamento externo aplicado a estrutura, e portanto, **f**, e também a matriz rigidez, é possível obter os deslocamentos nodais.

3. PARÂMETROS CALCULADOS:

Com o vetor que contém os deslocamentos nodais, é possível calcular importantes parâmetros para serem utilizados em análises e otimizações posteriores. Primeiramente, ao assumir comportamento elástico, é fácil obter a tensão do elemento a partir dos deslocamentos de seus nós [3], através da equação seguinte, em que a tensão é calculada em função do módulo de elasticidade, do comprimento e de sua variação para o elemento:

$$\sigma = \frac{E}{L} \delta$$

Além da tensão, que é um parâmetro essencial para um projeto, pode ser calculado, através do que foi obtido, o compliance. O compliance da estrutura é o trabalho relacionado às deformações que a treliça sofre [4], portanto, para maximizar a rigidez da estrutura, o compliance deve ser minimizado. Para o cálculo do compliance, são utilizadas as matrizes anteriormente definidas, como mostrado na equação a seguir:

$$C = f^T u$$

Ademais, outro valor importante a ser considerado é o Potencial de Aquecimento Global (PAG), que é a maneira utilizada para analisar a sustentabilidade da estrutura [1]. Então, aplica-se um Coeficiente de Carbono Incorporado (CCI), que é próprio do material, e que ao ser multiplicado pela massa do elemento resulta no PAG. O PAG da estrutura global pode ser calculado como o somatório para cada elemento, como mostrado na equação seguinte:

$$PAG = \sum_i^{n_{el}} \rho_i V_i CCI_i = \sum_i^{n_{el}} \rho_i A_i L_i CCI_i$$

4. OTIMIZAÇÃO

4.1. MODELAGEM

No início do processo de otimização, é gerada uma malha com uma alta densidade de potenciais elementos. Estes podem ser interligados de diferentes formas. Esta malha preliminar é chamada de *Ground Structure*.

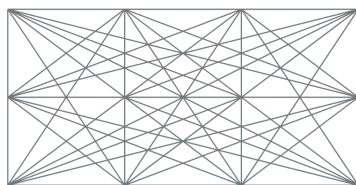


Figura 1: Malha totalmente interligada.

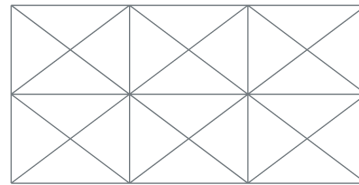


Figura 2: Malha em "X".

Com isso, e com as condições de contorno e carregamentos aplicados, é realizada uma análise por elementos finitos da *Ground Structure*. Então, com métodos iterativos para otimização, a área e o material dos elementos são otimizados, buscando minimizar a função objetivo enquanto satisfaz as

restrições físicas propostas. Neste caso, foi utilizada a função *fmincon*, do software MATLAB, com o algoritmo de Ponto Interior.

4.2. TRELIÇA DE MATERIAL ÚNICO

Nesta etapa, a função objetivo a ser minimizada foi o compliance total da estrutura, e foi sujeita a restrições de massa e de equilíbrio. Considerando material único, a restrição de massa é uma restrição de volume e para calculá-lo multiplicou-se a área de seção transversal e o comprimento do elemento. Além disso, as restrições são mostradas na equação a seguir:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$$

$$Vol = \sum_{i=1}^{n_{el}} A_e L_e \leq Vol_{max}$$

$$A_{min} \leq A_e \leq A_{max}$$

Na figura 3, tem-se a *Ground Structure*, e na figura 4 a estrutura otimizada. Esta configuração tem 5.04 m de comprimento e 2.54 m de altura, com 5 nós no eixo x e 3 no eixo y; a área inicial utilizada foi de $2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e a carga aplicada no nó central da extremidade livre foi de 3000 N. O volume máximo foi determinado como o volume da *Ground Structure*. O limite inferior de área foi de 0.1% da área inicial, já o limite superior foi definido como 10 vezes a área inicial. Além disso, deve-se considerar que todos nós da extremidade esquerda foram considerados engastados, como uma viga em balanço.

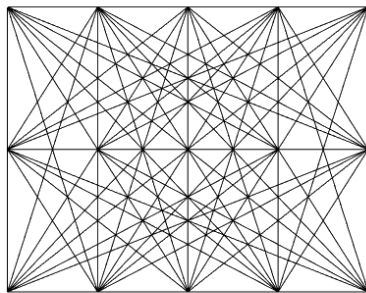


Figura 3: *Ground Structure*.

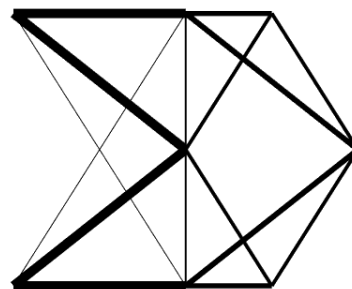


Figura 4: *Estrutura otimizada com um material*.

4.3. TRELIÇA MISTA (DOIS MATERIAIS)

Para a otimização da treliça com dois materiais, foram escolhidos como opções aço e madeira, pois possuem propriedades mecânicas e Coeficiente de Carbono Incorporado (CCI) diferentes [1].

Com a introdução de mais um material possível, as propriedades do elemento mudam de acordo com o material escolhido. Para modelar essas propriedades, introduz-se uma nova variável $0 \leq x_e \leq 1$,

que indica a composição do elemento, usando a interpolação SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Se $x_e = 0$, o material é madeira, se $x_e = 1$ é aço. Então, é possível calcular as propriedades em função de x_e , como mostrado na equação a seguir, em que Δ significa a diferença do valor da propriedade de aço e de madeira. O expoente η penaliza materiais intermediários, e o valor ideal é 3, como demonstrado no artigo [1].

$$E_e = (x_e)^\eta \cdot \Delta E + E_{madeira}$$

$$\rho_e = (x_e)^\eta \cdot \Delta \rho + \rho_{madeira}$$

Primeiramente, foram realizadas duas otimizações, ambas com o compliance sendo a função objetivo, porém, com restrições diferentes. No primeiro caso, foi imposta uma restrição de massa, como mostrado nas equações a seguir. No segundo caso, a restrição é de PAG, então a segunda linha das equações seria alterada por $\sum_{i=1}^{n_e} A_e \cdot L_e \cdot \rho_e \cdot CCI_e < PAG_{max}$, enquanto o resto permanece igual.

$$Ku = f$$

$$\sum_{i=1}^{n_e} A_e \cdot L_e \cdot \rho_e < W_{max}$$

$$A_{min} < A_e < A_{max}$$

$$0 \leq x_e \leq 1$$

O comprimento, a altura, o número de nós, as condições de contorno e o carregamento da *Ground Structure* permaneceram iguais. Para a otimização com restrição de massa, a área inicial utilizada foi de $2.5 \times 10^{-3} m^2$, e para a restrição de PAG, $1.25 \times 10^{-4} m^2$. Para restrição de massa e de PAG, o limite inferior para área foi de $2.5 \times 10^{-6} m^2$ e o limite superior foi de $2.5 \times 10^{-2} m^2$. Além disso, o valor inicial da composição de cada elemento foi de $x_e = 0.5$.

Assim, é possível calcular a massa máxima e o PAG máximo, para serem usados em cada uma das otimizações. Os dois valores foram calculados como sendo os valores referentes à *Ground Structure*. A estrutura otimizada com restrição de massa é mostrada na figura 6, e a com restrição de PAG na figura 7. A barra de cores mostrada ao lado está associada a composição x_e de cada elemento.

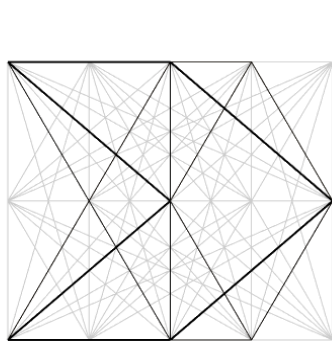


Figura 6: Estrutura otimizada com restrição de massa.

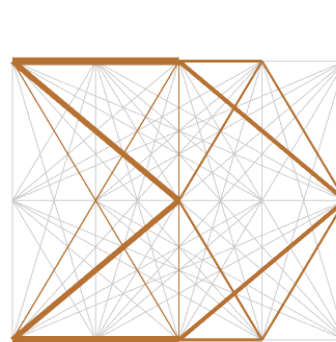


Figura 7: Estrutura otimizada com restrição de PAG.

Nota-se que quando a restrição de massa é aplicada, a estrutura tende a ter elementos de aço, uma vez que a resistência do aço é maior que a da madeira, e, portanto, é necessário menos material para aumentar a rigidez. Quando a restrição de PAG é aplicada, verifica-se que a estrutura tende a ter elementos de madeira, pois o CCI da madeira é muito menor que o do aço [1].

Após isso, foi realizada uma otimização com o PAG como função objetivo e restrição de tensão. Para a restrição, foi considerado que os elementos de madeira só deveriam ser submetidos a compressão e os de aço a tração. A *Ground Structure* permaneceu a mesma, porém o carregamento foi de 50000 N. A área máxima permitida foi de $2.5 \times 10^{-2} m^2$, e a mínima $2.5 \times 10^{-9} m^2$, e a inicial $2.5 \times 10^{-3} m^2$. O resultado, mostrado na figura 8, é uma treliça mista.

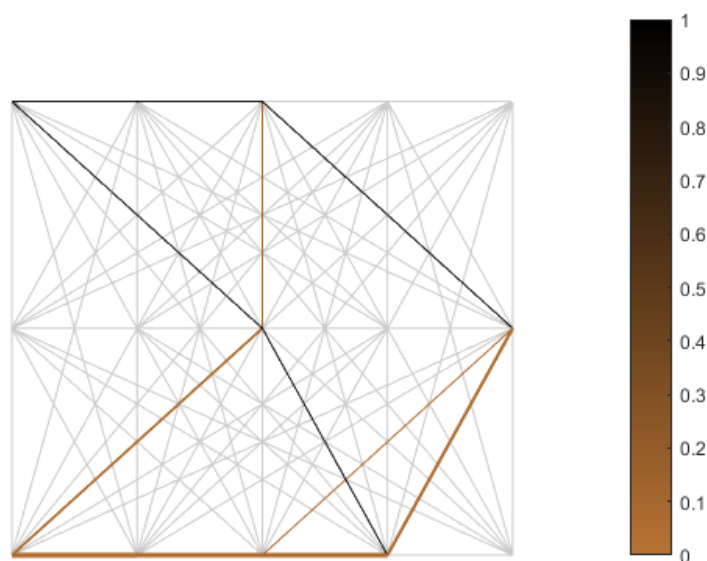


Figura 8: Estrutura otimizada com restrição de tensão.

5. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos estão de acordo com o esperado e reforçam a coerência da metodologia adotada, que busca aliar eficiência estrutural e sustentabilidade. Para trabalhos futuros, recomenda-se aplicar o mesmo modelo a diferentes geometrias e explorar outras formas de restrição.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ernest Ching and Josephine V. Carstensen. Truss topology optimization of timber–steel structures for reduced embodied carbon design. *Engineering Structures*, 252:113540, 2022.
- [2] Young Kwon and Hyochoong Bang. *The Finite Element Method Using MATLAB*. 10 2018.
- [3] R.C. Hibbeler. *Resistência dos materiais*. Pearson Education do Brasil, 2010.
- [4] Martin Philip Bendsøe and Ole Sigmund. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. 2004.