Programação de tarefas em ambientes de Máquinas Paralelas: exploração de diferentes modelos matemáticos e aplicações

PALAVRAS CHAVE. ***Scheduling*, Máquinas Paralelas, Programação Matemática.**

Carolina Gaitarosso Gali, FCA-UNICAMP
Orientadora: Profa. Dra. Priscila Cristina Berbert Rampazzo, FCA-UNICAMP

1. Introdução

Desenvolvida em um contexto de fornecimento de informações precisas para auxiliar o processo de tomada de decisão estratégica, a Pesquisa Operacional utiliza métodos matemáticos para indicar a melhor opção dentre todas as possíveis para o cenário apresentado, ou seja, para otimizar um processo. Dentro dessa área de conhecimento, existe uma classe de problemas chamada *Scheduling Problems* e, nela, um tipo conhecido como problema de Sequenciamento de Tarefas em um ambiente de Máquinas Paralelas.

Segundo da Paz e Júnior [2019], *Scheduling* pode ser definido como o processo de determinar quais atividades produtivas devem ser realizadas, quando as atividades devem ser realizadas e com quais recursos a demanda será atendida. O problema de sequenciamento de tarefas consiste em alocar n tarefas, à m recursos, satisfazendo restrições de alocação e otimizando uma função-objetivo. Dentre as possíveis funções-objetivo do problema [Leung, 2004], podemos destacar: a minimização do *makespan*, que consiste em minimizar o maior tempo de término em um conjunto de tarefas; a minimização do tempo de atraso total, que consiste determinar uma sequência, onde a soma de atrasos das tarefas seja mínima; a minimização do tempo de espera, ou seja, o tempo que a tarefa gasta desde que chega na máquina até começar a ser executada; e a minimização do adiantamento de tarefas que determina uma sequência com o menor valor do adiantamento total; a minimização da quantidade de tarefas finalizadas após o prazo de término, etc. Os seguintes parâmetros podem ser considerados no problema: tempo de chegada, prazo de execução, ordem de precedência das tarefas, tempo de processamento, tempo de preparação, etc.

A literatura sobre sequenciamento de tarefas em máquinas paralelas apresenta diversas aplicações para essa categoria. O objetivo da presente pesquisa foi explorar os problemas de sequenciamento de tarefas em máquinas paralelas, analisando diferentes modelagens e aplicações. Foram analisados parâmetros, funções-objetivo e formas de se modelar o problema. Diferentes aplicações para o problema foram identificadas: alocação de navios em berços, agendamento de operações cirúrgicas e programação de colheitas.

A primeira aplicação estudada foi o Problema de Alocação de Berços (BAP), no qual o cenário envolve alocar os navios que chegam aos berços de um porto, local onde atracam para realizar operações de carga ou descarga, em um determinado horizonte de planejamento [Barbosa et al., 2016]. Dessa forma, é necessário determinar qual navio será alocado em qual berço e, em que momento, considerando a quantidade limitada de berços, a chegada dos navios em horários distintos, os diferentes tempos de processamento e o prazo para que deixem o porto. Na formulação do problema, os navios são interpretados como tarefas e os berços como máquinas. A aplicação de diferentes funções-objetivo permite ao tomador de decisão escolher a alocação que melhor atenda às necessidades operacionais, podendo priorizar, por exemplo, a redução do tempo de espera para atracação, a diminuição de atrasos operacionais ou o tempo total de operação.

Outro cenário estudado foi o de agendamento de cirurgias eletivas, apresentado por Li et al. [2024]. Nesse artigo, o objetivo era determinar os horários de início das cirurgias e alocar os pacientes em um número limitado de leitos e salas cirúrgicas, garantindo o tratamento o mais rápido possível, ou seja, minimizando o *makespan*. Primeiramente, o problema foi mapeado e estruturado em três estágios: o pré-operatório, em que os pacientes são alocados às enfermarias com antecedência para procedimentos de preparação; o estágio cirúrgico, que inclui anestesia e operação; e o pós-operatório, no qual os pacientes retornam aos leitos para recuperação. Em seguida, foram consideradas algumas restrições, como: cada cama pode acomodar no máximo um paciente por dia; o paciente ocupa a cama durante toda sua estadia; e as durações dos períodos pré-operatório, cirúrgico e pós-operatório são determinísticas, podendo ser estimadas com base em dados históricos. Nesse modelo, as salas cirúrgicas são representadas como máquinas, e as cirurgias eletivas, como tarefas a serem executadas. Foram estabelecidas duas variáveis de decisão binárias: uma para indicar se o paciente j é internado no leito k no dia t e outra para identificar se o paciente j é submetido à cirurgia no dia t, além de uma terceira variável representando o dia da alta hospitalar. O problema foi resolvido com duas abordagens: a primeira utilizando programação inteira mista, e a segunda, métodos heurísticos para reduzir o tempo computacional. Assim, buscou-se aplicar técnicas de otimização em máquinas paralelas à rotina de um hospital, visando melhorar a eficiência do centro cirúrgico, reduzir os custos operacionais, aumentar a taxa de sobrevivência e aprimorar a qualidade do atendimento aos pacientes.

O trabalho de Junqueira e Morabito [2017] sobre programação e sequenciamento das frentes de colheita de cana-de-açúcar é tratado como de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção em máquinas paralelas, com custos e tempos de *setup* dependentes da sequência. O problema é modelado com um tipo de modelagem que busca determinar a quantidade de produtos a serem produzidos, organizados em lotes, e a ordem de fabricação, considerando múltiplas linhas de produção operando simultaneamente. Nesse contexto, as áreas de plantio, chamadas de blocos de colheita, são representadas pelos lotes, enquanto as frentes de colheita correspondem às máquinas paralelas ou linhas de produção. Além disso, são levados em conta fatores como o estágio de maturação da cana, o transporte até a usina e a capacidade operacional das máquinas. Para a resolução do problema, foi aplicado um modelo de programação inteira mista em conjunto com métodos heurísticos. A função-objetivo implementada visava à minimização dos custos relacionados à falha de moagem, à cana perdida na colheita e ao deslocamento entre os blocos.

2. Métodos e Metodologia

Para a realização da primeira etapa da pesquisa, foram selecionadas algumas modelagens de problemas de máquinas paralelas encontradas na literatura e, entre elas, a proposta por Barbosa [2018], utilizada no contexto dos Problemas de Alocação de Berços (BAP). Os seguintes parâmetros serão utilizados no modelo matemático:

K : Conjunto de máquinas, $K = \{1, 2, \ldots, \lvert K \rvert\}$	N : Conjunto de tarefas, $N = \{1, 2, \ldots, \lvert N \rvert\}$
r_i : O tempo de chegada da tarefa i	d_i : O prazo de entrega da tarefa i
p_{ij} : O tempo de processamento da tarefa i na máquina j	M : Um número grande

As variáveis de decisão do problema e a formulação das restrições são:

$x_i =$ tempo de início da tarefa i no horizonte de planejamento.

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a tarefa } i \text{ é alocada à máquina } j. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se a tarefa } i \text{ é predecessora da tarefa } k. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & objetivo && (1)\\
\text{s.a} \quad & \sum_{j \in K} z_{ij} = 1 \quad \forall i \in N && (2)\\
& z_{ij} + z_{kj} - y_{ik} - y_{ki} \leq 1 \quad \forall i, k \in N, i \neq k; j \in K && (3)\\
& x_i + \sum_{j \in K} p_{ij} z_{ij} - (1 - y_{ik})M \leq x_k \quad \forall i, k \in N && (4)\\
& z_{ij} + z_{kh} + y_{ik} + y_{ki} \leq 2 \quad \forall i, k \in N, i \neq k; j, h \in K, j \neq h && (5)\\
& x_i \geq r_i \quad \forall i \in N && (6)\\
& x_i + \sum_{j \in K} p_{ij} z_{ij} \leq d_i \quad \forall i \in N && (7)\\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in N && (8)\\
& y_{i,k}, z_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \in N, j \in K && (9)
\end{aligned}$$

Em que a restrição (2) garante que cada tarefa será alocada em apenas uma máquina. A restrição (3) garante que, se as tarefas i e k estão na mesma máquina, então ou a tarefa i está à direta da tarefa k ou vice e versa. A restrição (4) não permite que as tarefas estejam sobrepostas sobre o horizonte de planejamento. A restrição (5) reforça que a variável y_{ik} só existe para tarefas que estão na mesma máquina. Por fim, a restrição (6) não permite que as tarefas sejam alocadas antes de sua chegada. A restrição (7) garante que o tempo total de uma tarefa em uma máquina não ultrapasse o prazo de entrega da tarefa. As duas últimas restrições especificam o tipo de variáveis utilizadas. Os diferentes objetivos considerados foram:

- Minimização da soma dos tempos de espera (FO1):
  minimizar $\sum_{i \in N}(x_i - r_i)$
- Minimização do *makespan* (FO2):
  minimizar C_{max}
  $C_{max} \geqslant x_i + \sum_j p_{ij} z_{ij} \quad \forall i \in N \qquad C_{max} \geqslant 0$

3. Resultados e Discussões

Neste trabalho, o problema escolhido para aplicação e estudo do modelo foi o BAP. A instância de teste foi baseada em um cenário real de operação do Porto do Itaqui com 64 navios e 8

berços. Dos 64 navios, cada berço tem a possibilidade de receber a seguinte quantidade de navios: Berço100, 17; Berço101, 32; Berço102, 32; Berço103, 17; Berço104, 15; Berço105, 17; Berço106, 15; Berço108, 15. Essas restrições se baseiam no tipo de carga que o navio carrega e o tipo de alocação disponível no berço. O modelo foi implementado em linguagem de programação Python, utilizando o solver CP-SAT e executada no ambiente do Google Colab [OR-Tools, 2019].

Entre essas instalações portuárias brasileiras, destaca-se o Porto do Itaqui, localizado em São Luís, no Maranhão. Segundo a Confederação da Agricultura e Pecuária do Brasil, o Itaqui foi o único porto brasileiro a movimentar, em 2020, volumes de grãos acima de sua capacidade nominal, consolidando-se como um elo fundamental no escoamento da produção agrícola nacional. Tal desempenho reforça a sua relevância no cenário logístico brasileiro e evidencia a necessidade de análises cada vez mais precisas e sofisticadas para apoiar os gestores na resolução dos desafios operacionais enfrentados. O Complexo Portuário do Itaqui dispõe de uma infraestrutura operacional composta por oito berços, com profundidades que variam entre 12 e 19 metros, aptos à movimentação de granéis sólidos e líquidos. A gestão do tráfego de embarcações, os procedimentos de atracação e os demais aspectos operacionais são regulamentados por portarias específicas, as quais determinam que a atracação siga a disposição técnica de cada berço e respeite uma ordem previamente estabelecida, que leva em consideração os tipos de atracação – imediata, preferencial, prioritária ou sequencial. Esse conjunto de restrições e regras operacionais torna o processo de alocação de berços uma tarefa complexa, exigindo decisões que equilibram múltiplos interesses, objetivos e limitações.

As duas alocações, obtidas através da minimização de cada função-objetivo, são apresentadas pelos Gráficos de Gantt das Figuras 1, 2. Há concentração de navios nos Berços 101 e 102. Esse resultado já era esperado devido à maior quantidade de navios que esses berços admitem. Além disso, a alocação dos navios nos pares – Berços 101 e 102, Berços 106 e 108 – possuem características semelhantes. Observa-se que tanto a otimização de FO1 quanto a otimização de FO2 resultaram no mesmo *makespan* de 1782, o que indica soluções alternativas. No entanto, os tempos de espera variam significativamente, dependendo da escolha da função-objetivo. O Modelo com FO1 apresentou o menor tempo de espera total (1323), indicando uma alocação mais eficiente no uso dos recursos disponíveis e menor ociosidade para os navios. Em contrapartida, o Modelo com FO2, apesar de atingir o mesmo *makespan*, resultou em um tempo de espera elevado (25090).

Na alocação apresentada pelo Modelo com FO1 (Figura 1), os navios são alocados com maior proximidade temporal e no início do horizonte de planejamento, reduzindo períodos ociosos e aproveitando melhor as janelas de disponibilidade dos berços. Na alocação apresentada pelo Modelo com FO2 (Figura 2), por outro lado, embora mantenha uma boa organização e espaçamento entre os navios, estende para o final do horizonte de planejamento, o que indica uma eficiência temporal menor.

Referências

Barbosa, F. (2018). *Recent advances on the berth allocation problem= Avanços recentes ao problema de alocação de berços*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Barbosa, F., Moretti, A. C., Azevedo, A. T., et al. (2016). A brief survey of the berth allocation problem. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 8(1):39–56.

da Paz, L. C. e Júnior, J. E. P. (2019). Máquinas paralelas: Revisão sistemática da literatura. *IX Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção*.

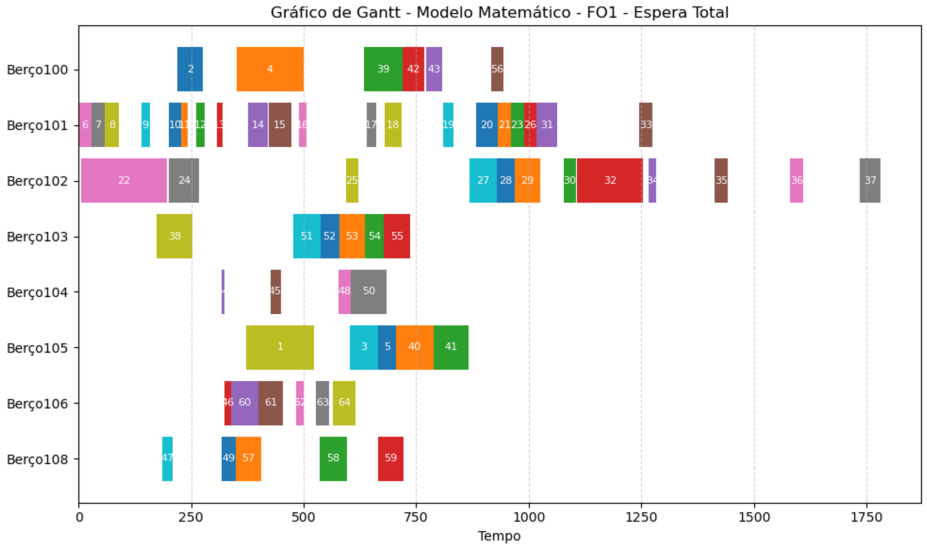

Figura 1: Gráfico de Gantt - Alocação da FO1 - Espera Total

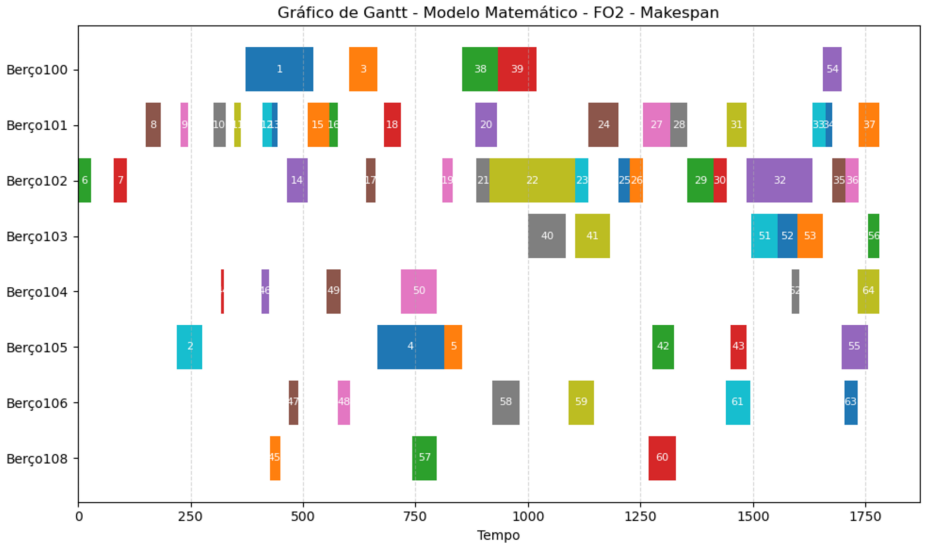

Figura 2: Gráfico de Gantt - Alocação da FO2 - Makespan

Junqueira, R. d. Á. R. e Morabito, R. (2017). Abordagens de otimização para a programação e sequenciamento das frentes de colheita de cana-de-açúcar. *Gestão & Produção*, 24:407–422.

Leung, J. Y.-T. (2004). *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models, and Performance Analysis*. Chapman and Hall/CRC, United States, 4^aed. edition.

Li, Z., Yu, H., e Zhou, Z. (2024). Scheduling of elective operations with coordinated utilization of hospital beds and operating rooms. *Journal of Combinatorial Optimization*, 47(5):75.

OR-Tools, G. (2019). Route. schedule. plan. assign. pack. solve. or-tools is fast and portable software for combinatorial optimization. https://developers.google.com/optimization/.