

APLICAÇÃO DE NURBS NA ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS.

Palavras-Chave: Análise Isogeométrica, IGA, NURBS, Análise de Elementos Finitos, FEA.

Autores(as):

BIANCA ESTEVES PIRANI, FECFAU – UNICAMP

Prof. Dr. NATHAN SHAUER (orientador), FECFAU – UNICAMP

Prof. Dr. PHILIPPE R. B. DEVLOO (coorientador), FECFAU – UNICAMP

1. Introdução

O fluxo de trabalho na engenharia foi transformado pela computação, resultando em dois campos distintos: o Design Auxiliado por Computador (CAD) e a Análise de Elementos Finitos (em inglês FEA). O CAD evoluiu para representar geometrias complexas com precisão, enquanto a FEA se tornou o padrão para simulação, utilizando malhas que aproximam essas geometrias.

O problema fundamental é que o CAD e a FEA, embora lidem com os mesmos objetos, desenvolveram-se de forma independente e com linguagens matemáticas distintas. Essa divergência obriga a uma conversão da geometria exata do CAD para uma malha de análise, um processo que consome mais de 80% do tempo em projetos complexos e introduz imprecisões geométricas que podem gerar erros significativos nas simulações. [1]

A Análise Isogeométrica (IGA) surge como uma solução para unificar CAD e FEA, eliminando a geração de malha. O princípio da IGA é usar uma base comum — como as funções NURBS do CAD — tanto para descrever a geometria com exatidão quanto para a análise numérica. Assim, a simulação é realizada diretamente sobre a geometria original, preservando sua precisão.

O objetivo deste trabalho é, portanto, demonstrar a aplicação prática da metodologia IGA. A análise se concentrará na implementação do método, documentando suas vantagens, os desafios técnicos e a eficiência observada ao utilizar uma base NURBS para representar a geometria e aproximar a solução.

2. Fundamentos Teóricos

2.1. Funções de Forma Tradicionais do Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) tradicional discretiza um domínio em uma malha e utiliza funções de forma polinomiais por partes, como os polinômios de Lagrange, para aproximar a solução. Essas funções são interpoladoras nos nós, com a função de base $L_j(x)$ associada ao nó j definida pela fórmula (para $k+1$ nós):

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

A base resultante é de continuidade C^0 entre os elementos. Isso garante uma solução contínua, mas resulta em derivadas descontínuas, o que pode limitar a precisão em problemas onde grandezas como tensão ou fluxo são importantes.

2.2. B-splines

As B-splines, blocos de construção fundamentais dos NURBS, são funções polinomiais por partes altamente flexíveis. Sua definição começa com um vetor de nós (*knot vector*, do inglês), formado por uma sequência de coordenadas em um espaço paramétrico que dita as fronteiras dos elementos e a continuidade. A partir deste vetor, as funções de base são geradas

recursivamente através da fórmula de Cox-de Boor. O processo inicia-se com funções constantes por partes (ordem polinomial $p = 0$) e para ordens superiores ($p \geq 1$) é definido como:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

Diferentemente das funções de forma tradicionais de elementos finitos, as B-splines oferecem vantagens significativas, mais notavelmente um alto grau de suavidade controlável (continuidade C^{p-m}) através das fronteiras dos elementos, onde p é a ordem do polinômio e m é a multiplicidade do nó. As geometrias são então construídas como uma combinação linear dessas funções de base e um conjunto de pontos de controle, o que proporciona uma maneira intuitiva de manipular a forma da curva ou superfície suave final.

A qualidade de aproximação superior da base B-spline é ilustrada na Figura 2, que compara visualmente como as soluções do MEF tradicional e das B-splines convergem para a solução exata à medida que o número de funções de base aumenta.

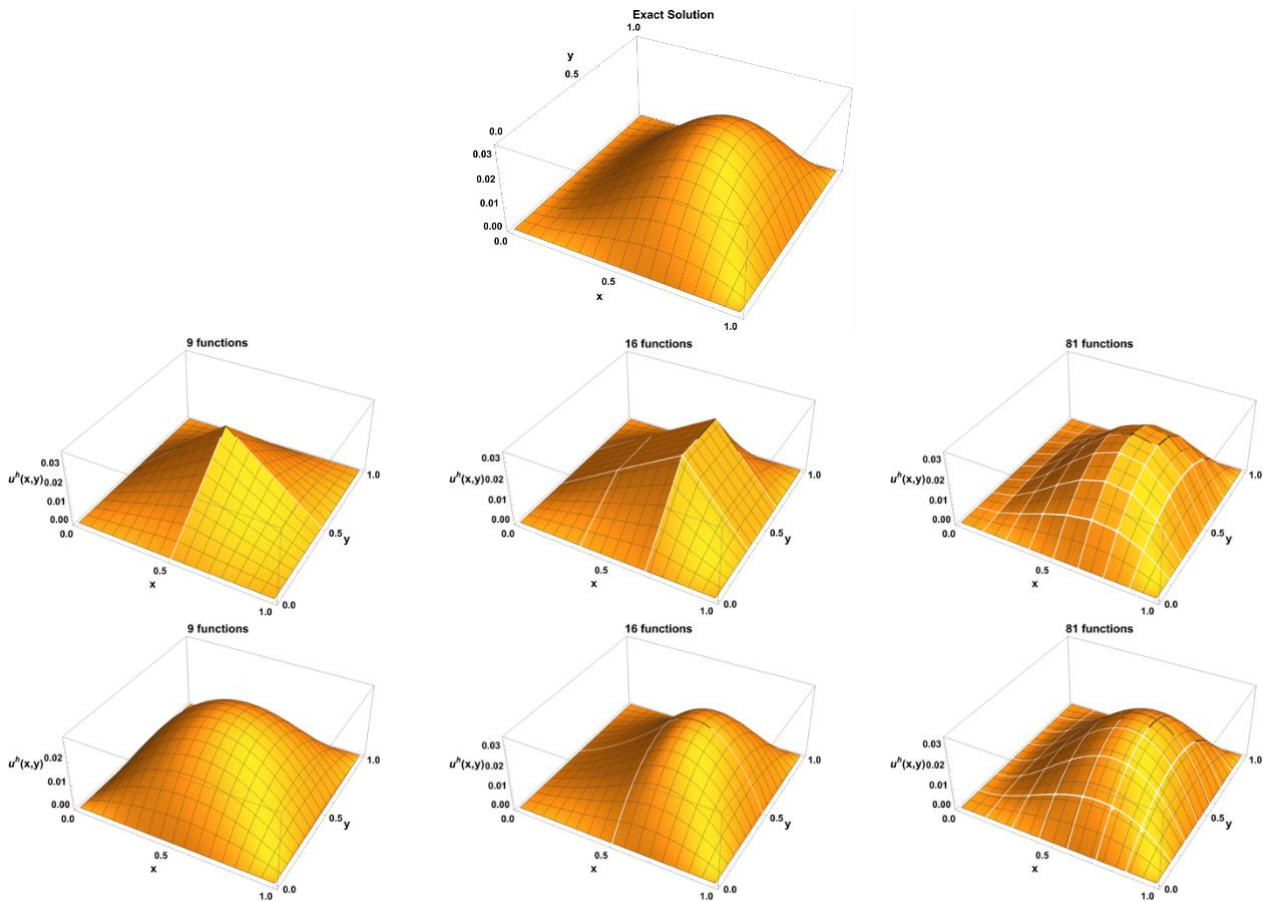


Figura 1. A primeira linha exibe a solução exata. A segunda e a terceira linhas mostram as soluções aproximadas utilizando, respectivamente, funções de forma tradicionais do MEF e funções de base B-spline como espaço de aproximação. Cada coluna corresponde a uma discretização com 9, 16 e 81 funções de base.

2.3. NURBS

Para representar exatamente formas de engenharia comuns, como círculos e esferas, o que os B-splines não conseguem fazer, são utilizados as B-splines Racionais Não Uniformes (NURBS), que são definidos como:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi)w_j}$$

onde i e j são os índices que identificam as funções de base e os pesos (w) correspondentes, e n é o número total de pontos de controle.

Esta estrutura, que adiciona um peso para cada ponto de controle, fornece um método unificado para representar formas complexas de formato livre e formas analíticas exatas. As B-splines são simplesmente um caso especial de NURBS, no qual todos os pesos são iguais. As figuras abaixo ilustram essa formulação, mostrando exemplos de curvas e superfícies NURBS e as funções de base suaves e de suporte local usadas para construí-las.

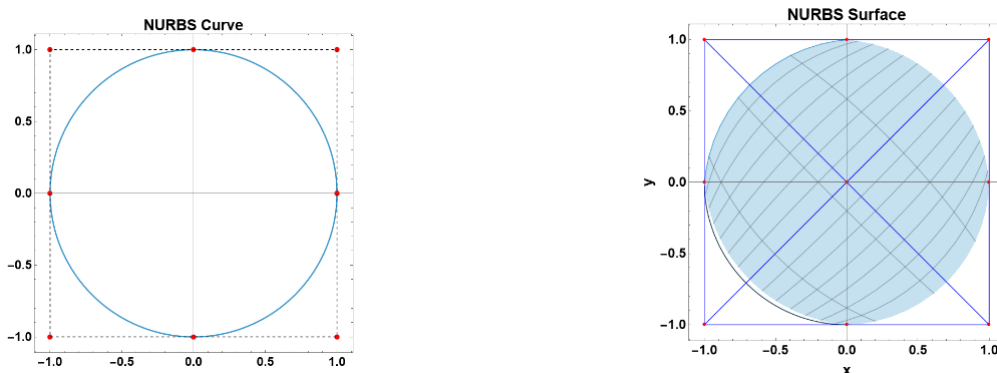


Figura 2. Ilustração de uma curva NURBS (esquerda) definida por seus pontos de controle (pontos vermelhos) e uma superfície B-spline (direita) construída a partir de uma malha de pontos de controle.

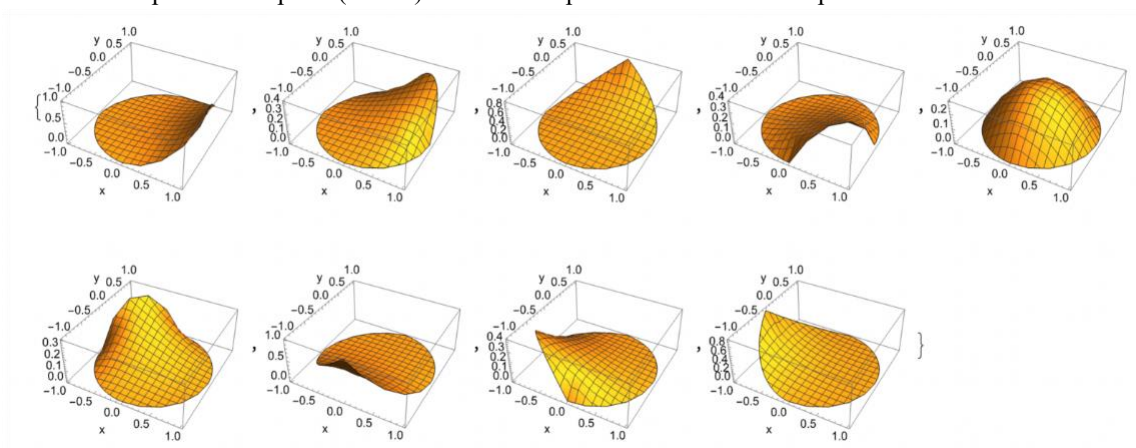


Figura 3. Ilustração do suporte local de cada função de base NURBS.

3. Metodologia e Caso de Estudo

3.1. Definição do Problema

O problema governante é a equação de Poisson em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, dada por: $-\Delta u = f$. Para a verificação do método, foi empregada a abordagem de solução manufaturada, onde uma solução exata é definida a priori:

$$u_{\text{exata}}(x, y) = x(1 - x)y(1 - y)\sin(x)$$

O termo de fonte f é subsequentemente calculado como $f = -\Delta u_{\text{exata}}$.

O domínio computacional Ω é um setor de anel circular de 90° , cuja geometria curva é representada exatamente por um único patch NURBS com funções de base quadráticas ($p = 2$) na direção circunferencial e lineares ($q = 1$) na direção radial.

Condições de contorno de Dirichlet foram impostas em toda a fronteira do domínio usando o método da penalidade. Um parâmetro de penalidade elevado, $\beta = 10^8$, foi utilizado para forçar a satisfação das condições de contorno.

3.2. Estratégia de Integração

A montagem do vetor de carga e especialmente da matriz de rigidez na IGA, que requer a integração numérica de produtos de funções de base NURBS (e suas derivadas), é um processo computacionalmente custoso e demorado. Para garantir a eficiência, foi adotada a Quadratura Gaussiana.

Devido à natureza *piecewise* das funções NURBS, cuja continuidade é reduzida nos nós, a integral sobre o domínio paramétrico é decomposta em uma soma de integrais sobre os *knot spans* (intervalos de nós). Uma regra de quadratura é então aplicada separadamente a cada intervalo delimitado por um par de nós distintos e consecutivos. Neste estudo, uma regra de 3 pontos em cada direção foi usada por intervalo.

3.3. Análise de convergência

Para avaliar a convergência da solução numérica, foi implementada uma estratégia de h-refinamento uniforme, que consiste na inserção de novos nós no espaço paramétrico para aumentar a densidade da malha de aproximação. Um aspecto central da IGA é que a geometria do domínio permanece idêntica e exata durante todo o processo de refinamento.

A eficácia do método foi quantificada calculando-se o erro na norma L^2 , definida como:

$$E = \|u_{exata} - u_{aprox}\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} (u_{exata} - u_{aprox})^2 d\Omega}$$

A taxa de convergência esperada foi calculada a partir da relação entre o tamanho do elemento (h), comumente usado no MEF, o número de funções de base (N) e a dimensão do problema, neste caso, 2D. Como a solução envolve um produto tensorial de dois espaços de B-spline com graus diferentes, a convergência global é governada pelo menor grau polinomial $p = \min(2,1) = 1$.

$$\text{Erro}_{L^2} \propto (N^{-1/2})^{1+1} = (N^{-1/2})^2 = N^{-1}$$

O comportamento de convergência foi analisado plotando o erro E em função do número total de funções de base para cada nível de refinamento da malha.

4. Resultados e Discussão

Os resultados do estudo são apresentados a seguir. A Figura 4 ilustra a convergência qualitativa, onde as soluções aproximadas para malhas sucessivamente h-refinadas (com 6, 12 e 462 funções de base) se aproximam visualmente da solução exata. A convergência quantitativa é detalhada na Figura 5, que mostra o decaimento do erro na norma L^2 em função do número de funções de base em uma escala log-log. A tendência linear descendente confirma a convergência algébrica do método. Os valores sobre a curva representam as taxas de convergência calculadas entre os pontos de refinamento e, para as malhas mais densas, observa-se que essa taxa se aproxima do valor esperado de -1.

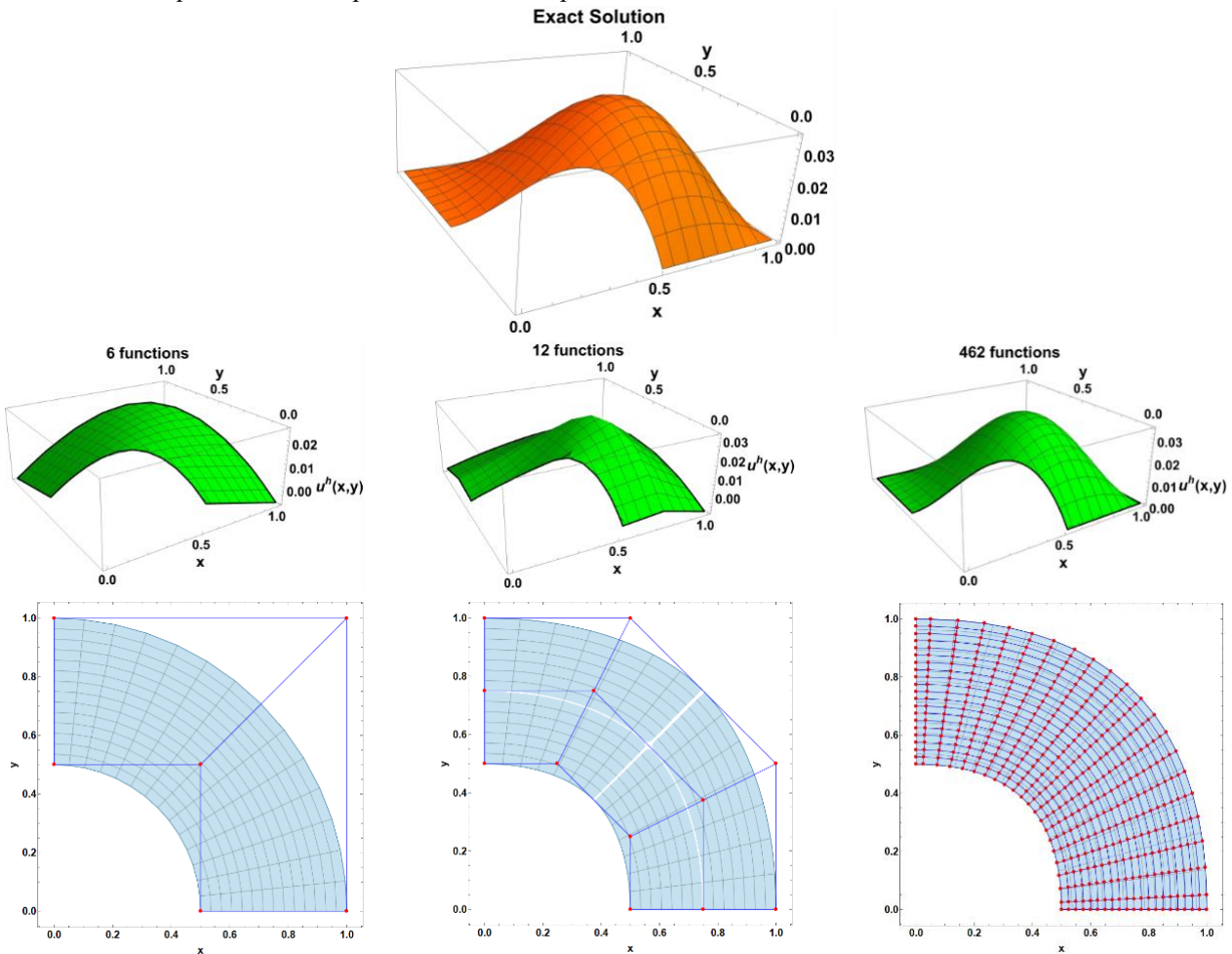


Figura 4. Comparação entre a solução exata (primeira linha) e as soluções aproximadas da IGA (segunda linha) para 6, 12 e 462 funções de base. A terceira linha exibe os pontos de controle (vermelho) utilizados para descrever a geometria do domínio (azul) para cada nível de refinamento.

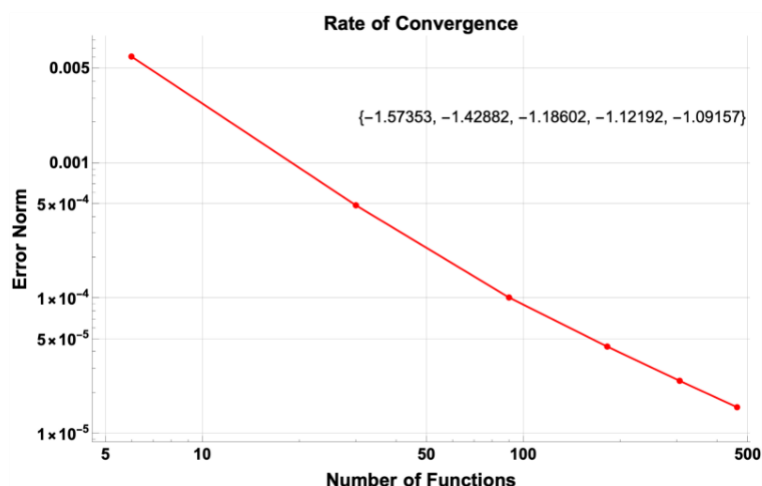


Figura 5. A taxa de convergência da IGA a cada discretização.

5. Conclusão

Neste trabalho, a Análise Isogeométrica foi aplicada para resolver a equação de Poisson em um domínio curvo, utilizando uma solução manufaturada para a verificação do erro. A convergência do método foi analisada através de um h-refinamento uniforme, e os resultados demonstraram a precisão e a robustez da formulação, atingindo as taxas de convergência esperadas. Trabalhos futuros incluirão a análise de exemplos adicionais e a comparação do desempenho da IGA com métodos alternativos.

Um dos principais destaques do estudo foi a capacidade das funções de base NURBS em representar perfeitamente a geometria apresentada. Esta característica elimina o erro de discretização geométrica, uma vantagem fundamental da IGA.

6. Referências

- [1] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, and Y. Bazilevs. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. John Wiley & Sons, 2009.
- [2] L. Carlon, "Isogeometric Analysis: Knot Insertion for NURBS". The Bug-Free Blog, 2021.
- [3] V. P. Nguyen, C. Anitescu, S. P. A. Bordas, and T. Rabczuk, "Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects". Archives of Computational Methods in Engineering, vol. 22, pp. 81–116, 2015.