ANÁLISE REAL: DO DISCRETO AO CONTÍNUO

Palavras-chave: Análise, Topologia, Espaços de Baire

Autores:
Leonardo Páscoa Chianello Bach, IMECC, Unicamp
Prof. Dr. Giuliano Angelo Zugliani (orientador), IMECC, Unicamp
Prof. Dr. Nicholas Braun Rodrigues (coorientador), IMECC, Unicamp

INTRODUÇÃO:

A princípio, esta iniciação científica tinha por intuito realizar uma introdução sistemática ao estudo da Análise Real[L1]. Com o seu desenvolvimento, descobriu-se um interesse maior por uma abordagem mais abrangente além da Análise Real, com um estudo complementar de Topologia[L2]. Dotado desta bagagem, o trabalho culminou no estudo de alguns tópicos de Topologia aplicada à Análise[H], particularmente o Teorema de Baire e, com ele, a demonstração da existência de **funções contínuas sem derivada**. No caminho deste estudo, foram realizadas: revisão aprofundada de Conjuntos, Funções e Números Reais[L1]; introdução a Topologia Geral[L2], com enfoque em espaços métricos e continuidade; e exploração dos conceitos de Sequências, Espaços de Funções, Funções deriváveis, entre outros[L1].

METODOLOGIA:

Para cumprir os objetivos, inicialmente foi proposto um estudo sistemático do livro *Curso de análise vol. 1*, do professor Elon Lages Lima, e, eventualmente, este foi suplementado pelo *Elementos de Topologia*, do mesmo autor, e *Aplicações da Topologia à Análise*, do professor Chaim Samuel Honig. O estudo destas obras, especialmente da segunda[L2], não foi realizada de forma sequencial, mas por tópicos comuns, cruzando as abordagens das diferentes fontes (e as instruções do orientador) para, em síntese, formular a interpretação própria e mais adequada para a finalidade da pesquisa.

Mês	Estudos
01	Teoria dos conjuntos[L0],[L1]
02	Números Reais/Topologia da Reta[L0],[L1]
03	Noções de Topologia Geral[L1],[L2],[H]
04	Sequências e Séries[L1],[L2]
05	Continuidade[L1],[L2]
06	Revisão/Relatório Parcial
07	Convergência[L1],[L2]
08	Derivabilidade[L1],[L2]
09	Espaços de funções[L2],[H]
10	Teorema de Baire e aplicação[H]
11	Revisão

Tabela 1: Calendário de estudos da pesquisa.

Esporadicamente, o aluno também assistiu a palestras e seminários (como os *Bolachinha*) de assuntos correlatos ao tema da pesquisa, interagindo com outros pesquisadores e orientadores, expandindo os horizontes das possibilidades de futuras pesquisas.

No segundo semestre da iniciação (terceiro da graduação), o estudo também foi reforçado pelo ingresso na cadeira MA502 - Análise I, com o bom desempenho resultante da experiência prévia com esta pesquisa.

Ademais, foram realizadas consultas em outros materiais relacionados e citados pelos livros-texto principais, além de, nos períodos de férias, a visualização recreativa dos cursos de Análise na Reta e Análise Funcional do IMPA, disponíveis no YouTube.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Ao fim de 11 meses de estudos, o resultado foi, fundamentalmente, cerca de 90 páginas de anotações amplas sobre Análise e Topologia, além da realização das atividades relacionadas a cadeira Análise I. No último mês restante até o relatório final, o aluno pretende continuar a revisar todo o material produzido para torná-lo mais sucinto e focado no tópico final, perpassando apenas os temas essenciais para construir essa conclusão.

6.2. Existência de funções contínuas sem derivada

Proposição 6.2.1 *O conjunto das funções definidas e contínuas na reta, $2\pi-$periódicas e que não possuem derivada em qualquer ponto da reta é denso no conjunto E de todas as funções $2\pi-$periódicas definidas e contínuas na reta $C_{2\pi}$.*

Demonstração: Se $f, g \in E$, seja $d(f,g) = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x) - g(x)|$; o espaço E com a distância d é um espaço métrico completo (Proposição 4.1.3). Seja F_n o conjunto das funções f de E tais que exista um ponto $t \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\frac{f(t+h) - f(t)}{h}\right| \leq n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{R}^+$.

Figura 1: Excerto do último capítulo do estudo.

O aluno assimilou, durante o primeiro semestre da pesquisa, basicamente as temáticas fundamentais para a compreensão da Análise Real (conjuntos, topologia da reta, sequências, séries, continuidade), com vislumbres de aplicações mais abrangentes em espaços métricos. No segundo semestre, além de revisar os tópicos anteriores no decorrer do curso de Análise I, o aluno aprofundou os conhecimentos de Topologia Geral, particularmente no desenvolvimento da metrização Espaços de Funções. Com uma sólida base de Topologia dos Espaços Métricos, estudou-se a topologia compacto-aberta como forma de metrizar o espaço das funções contínuas de um espaço métrico em um espaço de Banach, a partir do qual analisa-se mais especificamente o espaço das funções contínuas e $2\pi-$periódicas.

4.2. Metrização de compactos

Definição 4.2.1 *Sejam M um espaço métrico e N um espaço de Banach (normado completo). A **topologia compacto-aberta** (ou da convergência uniforme em compactos) é aquela em que, dada uma sequência $\{f_n\}$, na qual $f_n \to f$ em $\mathcal{C}(M,N)$ se, para todo compacto $K \subset M$:*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Figura 2: Excerto do capítulo que explora a topologia compacto-aberta.

4.2.1. Funções contínuas e 2π-periódicas

Definição 4.2.3 *Nota-se o espaço das funções contínuas $f : M \to N$ e 2π-periódicas por $\mathcal{C}_{2\pi}(M,N)$.*

Para $M = N = \mathbb{R}$, notamos $\overline{B(x_0,k)} = [-k,k]$, portanto, definimos a métrica:

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\sup_{x \in [-k,k]} |f(x) - g(x)|}{1 + \sup_{x \in [-k,k]} |f(x) - g(x)|}.$$

Proposição 4.2.3 *$\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é um espaço de Banach com norma $|f|_\infty = \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$.*

Demonstração: Se $k \geq \lceil \pi \rceil$, $[-k,k]$ contém um período completo de f, então:

$$\sup_{x \in [-k,k]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| =: |f - g|_\infty$$

Assim, para $k \geq \lceil \pi \rceil$, os termos da série são constantes:

$$d(f,g) \geq \sum_{k=\lceil \pi \rceil}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|f-g|_\infty}{1 + |f-g|_\infty} = \frac{1}{2^{\lceil \pi \rceil - 1}} \cdot \frac{|f-g|_\infty}{1 + |f-g|_\infty}$$

Ademais, como $\frac{|f-g|_\infty}{1+|f-g|_\infty} \leq |f-g|_\infty$, $d(f,g) \leq |f-g|_\infty$.
Assim, d é equivalente à norma $|f-g|_\infty$.

∎

Figura 3: Excerto do capítulo que aborda as funções contínuas e $2\pi-$periódicas.

Depois de uma exploração breve da derivabilidade de funções, o trabalho segue para sua conclusão enunciando a definição de Espaços de Baire, e demonstrando o Teorema de Baire (todo espaço métrico completo é de Baire), a ser aplicado a seguir.

6. Aplicação de Topologia à Análise [H]

6.1. Teorema de Baire

Definição 6.1.1 *Um espaço topológico B é um **espaço de Baire** se uma das duas condições equivalentes é satisfeita:*

1. *Toda interseção enumerável $\bigcap A_i$ de conjuntos abertos A_i totalmente densos em B ($\overline{A_i} = B$) é totalmente densa ($\overline{\bigcap A_i} = B$).*
2. *Toda reunião enumerável $\bigcup F_i$ de conjuntos fechados F_i sem ponto interior em B é sem ponto interior em B.*

Proposição 6.1.1 ***Teorema de Baire**: Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Figura 4: Excerto do capítulo final sobre Teorema de Baire.

A pesquisa é finalizada, como síntese de tudo que foi estudado, no estudo da demonstração da existência de funções contínuas sem-derivada[H]. Mais especificamente, mostrou-se que o conjunto das funções contínuas $2\pi-$periódicas em $\mathbb{R}$ e que não possuem derivada (em nenhum ponto) é denso no conjunto das funções contínuas $2\pi-$periódicas, $\mathcal{C}_{2\pi}$, um resultado interessantíssimo por sua contra-intuitividade, e possibilitado pelo Teorema de Baire.

O cerne da prova se dá pelo fato de que, sendo $\mathcal{C}_{2\pi}$ métrico completo, é, portanto, de Baire; assim, toda reunião enumerável $\bigcup F_i$ de conjuntos fechados F_i sem ponto interior, é sem ponto interior. Definindo F_n como o conjunto das funções f tais que exista um ponto $t \in \mathbb{R} : \left|\frac{f(t+h) - f(t)}{h}\right| \leq n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in$

$\mathbb{R}^+$, demonstramos que todo F_n é fechado e tem interior vazio. Assim, o interior de $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ também é vazio, de forma que $\complement_{\mathcal{C}_{2\pi}} \bigcup F_n$ é denso (em $\mathcal{C}_{2\pi}$). Dessa forma, se uma função $f_0 \in \mathcal{C}_{2\pi}$ possui derivada em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$, então existe n_0 tal que $f_0 \in F_{n_0}$, logo, o conjunto $\complement_{\mathcal{C}_{2\pi}} \bigcup F_n$ está contido no conjunto das funções contínuas $2\pi-$periódicas não-deriváveis em $\mathbb{R}$, finalizando a demonstração.

CONCLUSÕES:

Esta iniciação científica obteve resultados bastante satisfatórios, permitindo uma exploração de temas fundamentais para qualquer formação acadêmica em Matemática (Análise, Topologia, etc.) e abrindo portas de interesse em tópicos menos clássicos.

A demonstração conclusiva da existência de funções contínuas $2\pi-$periódicas e não-deriváveis foi escolhida justamente por possibilitar uma síntese muito conveniente de inúmeros conceitos abordados, retomando métricas, normas, continuidade, convergência, derivabilidade etc. Ademais, por sua contra-intuitividade, entende-se que o resultado soa muito atrativo, podendo ser utilizado como destaque na apresentação do pôster no Congresso vindouro.

A pesquisa também despertou o interesse do aluno em estudos futuros relacionados com Análise, como aprofundamento em Análise Real, Teoria da Medida, Probabilidade e Cálculo Estocástico, tópicos os quais pretende trabalhar em uma próxima iniciação científica.

BIBLIOGRAFIA:

[L0] LIMA, E. L., *Análise real volume 1. Funções de uma variável*, IMPA, 2014

[L1] LIMA, E. L., *Curso de análise vol. 1*, IMPA, 2014

[L2] LIMA, E. L., *Elementos de Topologia Geral*, USP, 1970

[H] HONIG, C. S., *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA, 1976