UM ESTUDO SOBRE EXISTÊNCIA DE CICLOS LIMITE AUXILIADA PELO SOFTWARE *WOLFRAM MATHEMATICA* COM APLICAÇÕES À TEORIA DO CONTROLE E MODELAGEM

Palavras-Chave: Ciclos Limite, Sistemas Dinâmicos, Teoria de Controle

Aluna: Ana Paula Eckert Montandon – FEM – UNICAMP
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins – IMECC – UNICAMP

1 Introdução

A teoria dos Sistemas Dinâmicos é uma área muito importante da matemática, tanto do ponto de vista teórico quanto por suas aplicações. Neste trabalho, tratamos de sistemas dinâmicos gerados por fluxos de equações diferenciais ordinárias, especialmente no caso de equações que modelam fenômenos físicos, como o movimento de um pêndulo.

Ao tratar destes sistemas, existe um tipo especial de solução que é muito importante: as soluções periódicas. Em particular, nos interessa estudar a existência de ciclos limite, que são curvas fechadas obtidas como soluções periódicas dos sistemas dinâmicos. Para a análise da existência dos ciclos limite existem múltiplas abordagens teóricas que garantem ou excluem suas existências. Dentre elas, se destacam o Teorema de Green, o Critério de Dulac e o Critério de Bendixson.

Já para os resultados sobre a existência de ciclos limites, neste trabalho abordamos o Teorema de Poincaré-Bendixson e o Método da Média (conhecido também por *Averaging Method*). A partir da análise destes resultados, é possível destacar os pontos positivos e negativos de cada uma das abordagens, uma análise que será realizada ao longo deste artigo.

Para estudar aplicações em teoria do controle, principalmente no caso das equações descontínuas, estudamos também o método das equações de fechamento. Utilizando deste método, juntamente com os princípios da Teoria de Controle, há uma relevante otimização nas modelagens de ciclos limite.

Por fim, para o estudo em questão, devido à sofisticação de modelagens matemáticas utilizadas, utilizou-se o software *Wolfram Mathematica*, que possibilitou a realização das análises discutidas.

2 Metodologia

Como apresentado previamente, para a abordagem dos ciclos limites, utilizamos dos seguintes embasamentos teóricos:

2.1 Teorema de Green

Para a existência de um Ciclo Limite, tem-se que, por definição, garantir que a curva da equação em questão seja fechada. Para isso, é necessário a aplicação do Teorema de Green, que denota uma curva fechada orientada positivamente.A seguir, tem-se o seu enunciado:

Teorema 1 (Teorema de Green) *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente e seja D a região delimitada por C. Se P e Q tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contém D, então:*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \tag{1}$$

Ou seja, a aplicabilidade do Teorema de Green garante a viabilidade de um ciclo limite, haja vista que o mesmo deve ser uma curva fechada, característica indicada pelo Teorema de Green.

2.2 Critério de Dulac

Também embasando-se no Teorema de Green, temos o Critério de Dulac. Para ele, consideramos um campo de vetores com diferenciais contínuos, definido em uma parcela contínua do plano - região aberta e simplesmente conexa.

Definição 2 *Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ uma região aberta, simplesmente conexa, e considere o sistema autônomo:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

com f e g continuamente diferenciáveis em R. Se existe uma função $B(x,y) \in C^1(R)$ tal que a divergência

$$\frac{\partial}{\partial x}(Bf) + \frac{\partial}{\partial y}(Bg)$$

tem sinal constante (sempre positiva ou sempre negativa, e nunca nula) em R, então ***não existem órbitas fechadas inteiramente contidas em*** *R.*

Ou seja, a aplicabilidade do Critério de Dulac se dá para verificar a não existência de um ciclo limite em dada região, possibilitado por dado sistema de equações.

2.3 Critério de Bendixson

O Critério de Bendixson utiliza de um mecanismo semelhante ao do critério de Dulac, baseando-se na mudança de sinal do divergente, ocorrendo da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \quad \hookrightarrow \quad \nabla . F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{2}$$

Ou seja, a funcionalidade do Critério de Bendixson atua de maneira análoga ao de Dulac, baseando-se na mudança de sinal, que pode garantir a não existência de um ciclo limite em dada região quando não há a mudança de sinal no domínio analisado.

3 Resultados e Discussão

Com base nas metodologias previamente discutidas, há a aplicabilidade das seguintes bases de resultados:

3.1 Teorema de Poincaré-Bendixson

Ao estudarmos este Teorema, tem-se que o seu principal resultado é:

Teorema 3 (Poincaré-Bendixson) *Um conjunto limite compacto não vazio de um sistema dinâmico planar C1, que não contém ponto de equilíbrio, é uma órbita fechada.*

Com base neste Teorema, aliado ao Teorema de Green, há a necessidade de garantir que o sistema de equações em análise componha uma órbita fechada.

Para o seu funcionamento, com base em um sistema de condições inicias, há o cálculo de dois fluxos, um para $t > 0$ e outro para $t < 0$. Com eles, são inseridos 2 limites, um tendendo ao $+\infty$ e outro para o $-\infty$.

Ao plotar um gráfico com ambos os fluxos, e na imagem obtida seja esboçado um fluxo para fora e outro para dentro, há a garantia de um ciclo limite nesta região, entre eles. Um exemplo de aplicação se dá na seguinte imagem:

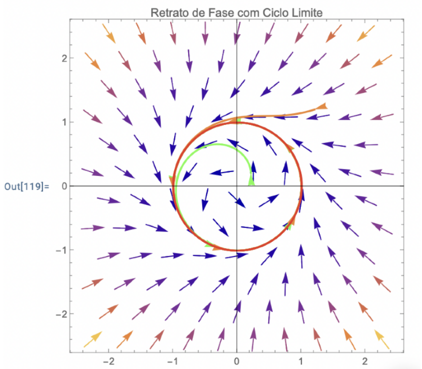

Figura 1: Com base em um código desenvolvido durante a pesquisa no *Wolfram Mathematica* obtivemos este plot. Nota-se na imagem que, há dois fluxos bem definidos, um espiralado para dentro e outro para fora. Nota-se também que, entre eles, há uma curva fechada, correspondendo à um ciclo limite.

Dessa forma, tem-se que o Teorema de Poincaré-Bendixson garante a existência do ciclo limite. Este é um teorema de existência, mas não diz exatamente qual é o ciclo limite.

3.2 Método da Média/Método do Averaging

Como citado anteriormente, ao se tratar do Teorema de Poincaré-Bendixson, tem-se que, com a sua aplicação, há a garantia da existência de um ciclo limite, sem no entanto conseguirmos saber mais detalhes sobre o ciclo, somente que está contido em uma certa reunião do plano.

Um outro método que permite encontrar ciclos limite e nos dá mais indicações de qual condição inicial leva ao ciclo é o Método da Média.

O método da média reduz o problema de determinar a existência de ciclos limite ao problema de resolver algumas equações algébricas. Em alguns casos, quando as equações são muito complicadas, elas foram resolvidas numericamente, usando o software *Wolfram Mathematica*.

3.3 Equações de Fechamento aplicadas à Teoria de Controle

As Equações de Fechamento são as alternativas interessantes para usarmos quando buscamos provar a existência de Ciclos Limite no caso de equações descontínuas.

Estas soluções acontecem quando trabalhamos em um plano x-y (plano cartesiano em 2D) e buscamos soluções que, para ambos os lados de x, sejam ”continuações”uma da outra. Para isso, imagine que uma solução em $x > 0$ começa em a e finaliza em b. Para que se trate de uma equação de fechamento, o eixo $x < 0$ deve iniciar em b e finalizar em c, sendo que $a = c$. As equações de fechamento visam encontrar o valor de uma parâmetro para se obter uma solução fechada para a Equação Diferencial.

Com base na premissa acima, realizamos a aplicação nas modelagens da Teoria de Controle, conforme o discutido em [7].

4 Conclusões

Com base no que foi discutido, vemos que para sistemas descontínuos o uso de equações de fechamento é uma boa estratégia para estudar a existência de ciclos limite.

Referências

[1] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, 2012.

[2] R. M. Martins, A. C. Mereu, *Limit cycles in discontinuous classical Lienard equations.* Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 20, pp. 67–73, 2014.

[3] T. P. Dreyer, *Modelling with Ordinary Differential Equations*, CRC Press, 1993.

[4] D. Zill, *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem*, Cengage Learning, 2016.

[5] J. Vaqueiro, *Notas de Aula EM707 - Controle de Sistemas Mecânicos*, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, 2022.

[6] Marcus A. M. de Aguiar, *Notas de aula - Sistemas Dinâmicos*, UNICAMP, 2005.

[7] Marcos Cesar Vergès, *Regularização e Análise Qualitativa de Modelos da Teoria do Controle*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, 2003.

[8] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, S. R. Aula III – *Ciclos Limite. Apostila do curso de Sistemas Dinâmicos*, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, 2003.

[9] SILVA, L. R. da. *Ciclos-limite: estabilidade orbital e controle ativo de oscilações autorressustentadas. 2017. 138 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)* – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, 2017.

[10] JOUSSEPH, Carlos Alberto Coelho. *Ciclos limite e os teoremas de Poincaré-Bendixson. 2016. 36 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)* – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

[11] BORGES, Mateus Fontana. *Ciclos Limite. 2016. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática)* – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Joinville, 2016.