XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

Máquinas - Uma Generalização de Lógicas

Palavras-Chave: Lógica, Traduções entre Lógicas, Categorias de Lógicas e Traduções

Gabriel L. Adrião, IMECC - Unicamp
Profa. Dra. Itala M. L. D'Ottaviano, IFCH - Unicamp

Julho, 2025

1 Introdução

Lógica é uma disciplina estudada desde a antiguidade, fundamental para a construção e o entendimento do raciocínio e pedra basilar da matemática como a conhecemos. Contrariamente ao senso comum, porém, a lógica não é algo único e imutável, muito pelo contrário, existem diversas lógicas diferentes que expressam relações sintáticas e semânticas diversas. Estamos acostumados a lidar, no dia a dia e na matemática, com o que é conhecido como lógica clássica, que é uma classe de lógicas com uma série de propriedades, como a lei do terceiro excluído e a lei da não contradição, mas este é um grupo irrisório quando comparado com a infinidade de diferentes lógicas existentes. Diante dessa diversidade, com o progresso do campo, viu-se necessária a construção de uma definição abstrata de lógica que consiga aglutinar as diferentes instâncias desse complicado conceito em um só formalismo.

Nesta pesquisa adotamos o formalismo que considera uma lógica como um par formado por um conjunto qualquer e um operador de consequência de Tarski definido sobre este conjunto. Essa é uma formalização que abrange grande parte das lógicas estudadas na literatura, apesar de deixar de lado, por exemplo, as lógicas não monotônicas, as lógicas indutivas e as lógicas abdutivas. Uma ferramenta fundamental para a investigação das lógicas e de suas propriedades em comum é o conceito de tradução entre lógicas, uma aplicação que transforma uma lógica em outra preservando relações de consequência, ou seja, preservando a relação entre premissas e teoremas. A classe das lógicas assim definidas e a classe das traduções entre essas lógicas forma uma categoria, denotada Tr.

A ciência da computação é um campo do conhecimento umbilicalmente conectado com a lógica e com a matemática. Exemplo dessa relação é o fato de computadores serem construídos a partir de portas lógicas, dispositivos eletrônicos que realizam operações lógicas booleanas sobre os sinais que recebem. Para investigar o funcionamento de computadores existem abstrações matemáticas que encapsulam o funcionamento essencial das máquinas que tanto usamos, uma dessas abstrações, possivelmente a mais famosa e importante, é chamada de máquina de Turing. Um automato celular é um modelo de computação discreta que atua sobre uma grade de células, cada uma podendo assumir algum valor previamente definido, e que em cada iteração do modelo são atualizadas baseada na configuração dos estados das células ao seu redor.

O principal resultado desta pesquisa é a definição de dois novos objetos matemáticos, denotados máquinas e conversões, que generalizam lógicas e traduções, respectivamente. A classe das máquinas e a classe das conversões formam, também, uma categoria, denotada Maq, que generaliza a categoria Tr, ou seja, provo neste trabalho que Tr é uma subcategoria de Maq. Também é explorado algumas propriedades das máquinas e apresentados alguns exemplos de máquinas que não são lógicas, mais notavelmente provo que máquinas de Turing e autômatos celulares são casos específicos de máquinas, colocando esses três conceitos sob um mesmo formalismo.

2 Metodologia

A metodologia utilizada neste projeto foi dupla, por um lado foram realizados semanalmente encontros entre o estudante, sua orientadora e uma orientanda de doutorado da mesma. Nestes encontros o estudante e a doutoranda revezavam em quem apresentava uma breve aula sobre assuntos diversos relacionados à pesquisa, como uma introdução à teoria das categorias, teoria de modelos, teoria de topos e a apresentação minuciosa dos conceitos estudados na tese de doutorado de Hércules de Araújo Feitosa, intitulada 'Traduções Conservativas'. Por outro lado o estudante perseguiu a ideia que teve de generalização de lógica através da enunciação e prova de diversas definições e teoremas que construíam o conceito de máquinas e à relacionavam com a categoria das lógicas adotada pela literatura sob análise.

3 Desenvolvimento

Nesta sessão serão construídos, a partir da apresentação das definições e teoremas demonstrados, os principais resultados alcançados pelo estudante. Os teoremas não serão explicitamente provados neste documento em função da falta de espaço.

Começamos definindo o que exatamente é uma máquina.

Definição 1. *Seja X um conjunto e $f : X \to X$ uma função, o par (X, f) é uma máquina.*

Dado uma máquina, definimos dois conceitos extremamente necessários para a investigação aprofundada das propriedades dela, o conceito de sequência encapsula o "caminho" que um elemento do conjunto que define a máquina percorre quando a função da máquina é continuamente aplicada a ele. O conceito de limite expressa o estado "final" desta sequência, caso a sequência alcance um ciclo fechado em algum momento, esse ciclo é o limite; caso isso não aconteça, a sequência em si é o limite.

Definição 2. *Seja (X, f) uma máquina, dado $x \in X$, a sequência enumerável de x por f, denotada $\mathcal{S}_f(x)$, é o conjunto:*

$$\mathcal{S}_f(x) := \{f^\lambda(x) : \lambda \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

Definição 3. *Seja (X, f) uma máquina e $x \in X$, o limite de x por f, denotado $\mathcal{S}_f(\overline{x})$, é a sequência de $y \in X$ por f, onde y é algum elemento da sequência de X que se repete, formalmente $\mathcal{S}_f(\overline{x}) := \mathcal{S}_f(y)$ t.q. $\exists \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{N}, \lambda_0 \neq \lambda_1$ t.q. $f^{\lambda_0}(x) = f^{\lambda_1}(x) = y$. Se não existe y que satisfaça essas propriedades, $\mathcal{S}_f(\overline{x}) := \mathcal{S}_f(x)$.*

Em seguida, definimos o conceito de elemento fechado, que é um elemento cuja sequência e o limite coincidem, e o de fecho de um elemento $x \in X$, que neste contexto é o primeiro elemento alcançado pela aplicação contínua de f sobre x que pertença ao limite de x.

Definição 4. *Seja (X, f) uma máquina e $x \in X$. Se $\mathcal{S}_f(\overline{x}) = \mathcal{S}_f(x)$, dizemos que x é um elemento fechado de (X, f).*

Definição 5. *Seja (X, f) uma máquina e $x \in X$, o fecho de x por f, denotado $\overline{x}^f$, é o primeiro elemento do limite de x, formalmente, $\overline{x}^f := \underset{y \in \mathcal{S}_f(\overline{x})}{argmin}\{\lambda \in \mathbb{N} \mid f^\lambda(x) = y\}$.*

Seguem alguns resultados que melhor caracterizam os conceitos recém-definidos.

Teorema 1. *Seja (X, f) uma máquina, todo elemento de X possui um fecho.*

Teorema 2. *Sejam (X, f) uma máquina e $x \in X$. x é um elemento fechado de $(X, f) \iff \overline{x}^f = x$*

Teorema 3. *Sejam (X, f) uma máquina e $x \in X$, x é um elemento fechado de $(X, f) \iff x \in \mathcal{S}_f(\overline{x})$.*

Teorema 4. *Sejam* (X, f) *uma máquina e* $x, a \in X$ *t.q.* $a \in \mathcal{S}_f(x)$. a *é fechado* $\iff$ $a \in \mathcal{S}_f(\overline{x})$.

Corolário 1. *Sejam* (X, f) *uma máquina e* $x \in X$*, então* $\overline{x}^f$ *é um fechado de* (X, f).

Agora é definida uma distinção qualitativa entre elementos do conjunto de uma máquina, elementos degenerados são elementos para os quais a aplicação contínua da função não estabiliza num ciclo finito, ou seja, elementos cuja sequência é infinita. Por outro lado, elementos não degenerados são elementos com sequência finita, ou seja, elementos que eventualmente alcançam algum ciclo. Depois desta definição, alguns resultados caracterizando cada uma dessas classes de elementos são apresentados.

Definição 6. *Seja* (X, f) *uma máquina e* $x \in X$ *um elemento de* (X, f)*. Se* $\mathcal{S}_f(x)$ *for um conjunto finito, dizemos que* x *é um elemento não degenerado de* (X, f)*; se for um conjunto infinito, dizemos que* x *é um elemento degenerado de* (X, f).

Teorema 5. *Seja* (X, f) *uma máquina e* $x \in X$ *um elemento fechado não degenerado de* (X, f)*. Então* $\exists\ \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{N},\ \lambda_0 < \lambda_1$ *t.q.* $f^{\lambda_0}(x) = f^{\lambda_1}(x) = x$

Teorema 6. *Seja* (X, f) *uma máquina e* $x \in X$ *um elemento degenerado de* (X, f)*. Então* x *é fechado.*

Teorema 7. *Seja* (X, f) *uma máquina,* $x \in X$ *e* $y \in \mathcal{S}_f(x)$. y *é degenerado* $\iff$ x *é degenerado.*

Corolário 2. *Seja* (X, f) *uma máquina,* $x \in X$ *e* $y \in \mathcal{S}_f(x)$. y *é não degenerado* $\iff$ x *é não degenerado.*

Finalmente, definimos o conceito de conversão e apresentamos o resultado de que uma conversão preserva fechados.

Definição 7. *Sejam* $(X, f), (Y, g)$ *máquinas, uma aplicação* $C : X \to Y$ *é uma conversão entre* (X, f) *e* (Y, g) *se* $\forall x, y \in X$:

$$x \in \mathcal{S}_f(\overline{y}) \Rightarrow C(x) \in \mathcal{S}_g(\overline{C(y)}) \tag{2}$$

Teorema 8. *Sejam* (X, f)*,* (Y, g) *máquinas,* $C : X \to Y$ *uma conversão e* $x \in X$ *um fechado de* (X, f)*, então* $C(x)$ *é um fechado de* (Y, g).

Agora começamos a olhar para esses objetos com uma lente categorial, provando que a classe das máquinas e as conversões entre elas formam uma categoria, assim como identificamos os objetos iniciais e terminais desta categoria.

Teorema 9. *A classe das máquinas e a classe das conversões formam uma categoria. Esta categoria é denotada por* Maq.

Teorema 10. *Seja* $\emptyset = \{\}$ *o conjunto trivial e* $f : \emptyset \to \emptyset$*, a máquina* $(\emptyset, f)$ *é um objeto inicial de* Maq

Teorema 11. *Seja* $X = \{a\}$ *um conjunto unitário e* $Id_X : X \to X$ *a função identidade em* X*, a máquina* (X, Id_X) *é um objeto terminal de* Maq.

Para continuar iremos considerar uma subcategoria da categoria das lógicas, chamada de categoria das lógicas enumeráveis, que são lógicas cujo conjunto seja enumerável. A imensa maioria das lógicas consideradas na literatura são objetos desta subcategoria, inclusive as lógicas clássicas mais utilizadas na matemática.

Definição 8. *Seja* X *um conjunto enumerável e* $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *um operador de consequência de Tarski. O par (X, C) é uma lógica enumerável.*

Definição 9. *Sejam* $(X, C_1), (Y, C_2)$ *lógicas enumeráveis, uma aplicação* $T : X \to Y$ *é chamada de tradução se,* $\forall\ A \cup \{x\} \subset X$*:*

$$x \in C_1(A) \Rightarrow T(x) \in C_2(T(A)) \tag{3}$$

Teorema 12. *A classe das lógicas enumeráveis e a classe das conversões formam uma categoria. Esta categoria é denotada por* TrE *e é subcategoria plena de* Tr*.*

Prosseguindo, agora começaremos o esforço de provar que as lógicas enumeráveis são uma subcategoria das máquinas. Para tal vamos nos aproveitar do fato de serem enumeráveis e construir ordenações de seus elementos, em seguida, utilizaremos destas ordenações para construir funções que os percorrem, de maneira a induzir, dada uma lógica enumerável, uma máquina.

Definição 10. *Seja (X, C) uma lógica enumerável e* $A \subset X$*. Seja* $N = \{i \in \mathbb{N} : i < |C(A)|\}$*, uma ordenação* $\mathcal{O}_A$ *da consequência de A, é uma função bijetiva* $\mathcal{O}_A : N \to C(A)$*.*

Definição 11. *Seja (X, C) uma lógica enumerável e* $(\mathcal{O}_A)_{A \subset X}$ *uma família de ordenações de consequências de subconjuntos de X. A função*

$$\begin{aligned} f_{(\mathcal{O}_A)_{A\subset X}} : \mathcal{P}(X) \times X &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \times X \\ (A, x \notin C(A)) &\longmapsto (A, \mathcal{O}_A(0)) \\ (A, \mathcal{O}_A(-1)) &\longmapsto (A, \mathcal{O}_A(0)) \\ (A, \mathcal{O}_A(n)) &\longmapsto (A, \mathcal{O}_A(n+1)) \end{aligned} \tag{4}$$

é chamada de função induzida por $(\mathcal{O}_A)_{A \subset X}$*, onde* $\mathcal{O}_A(-1)$ *é o "último" elemento da ordenação, se houver.*

Definição 12. *Seja (X, C) uma lógica enumerável e* $(\mathcal{O}_A)_{A \subset X}$ *uma família de ordenações de consequências de subconjuntos de X. O par* $(\mathcal{P}(X) \times X, f_{(\mathcal{O}_A)_{A\subset X}})$ *é chamado de máquina induzida por (X, C) e* $(\mathcal{O}_A)_{A \subset X}$*.*

Seguem alguns resultados referentes à caracterização de elementos específicos de uma máquina induzida por uma lógica enumerável.

Lema 1. *Seja (X, C) uma lógica enumerável,* $(\mathcal{O}_A)_{A \subset X}$ *uma família de ordenações de consequências de subconjuntos de X e* $A \subset X$*.* $(A, \mathcal{O}_A(0))$ *é um fechado de* $(\mathcal{P}(X) \times X, f_{(\mathcal{O}_A)_{A\subset X}})$*.*

Proposição 1. *Seja (X, C) uma lógica enumerável e* $(\mathcal{O}_A)_{A \subset X}$ *uma família de ordenações de consequências de subconjuntos de X.* $\forall A \cup \{x\} \subset X$*:*

$$x \in C(A) \iff (A, x) \in \mathcal{S}_{f_{(\mathcal{O}_A)_{A\subset X}}}(\overline{(A, \mathcal{O}(0))}) \tag{5}$$

Com essa próxima proposição, vemos que não é necessário especificar uma família de ordenação de consequências de subconjuntos de X para definir a máquina induzida por (X, C). A partir de agora a máquina induzida será denotada $(\mathcal{P}(X) \times X, C_{\mathcal{O}})$.

Proposição 2. *Seja (X, C) uma lógica enumerável e* $(\mathcal{O}_A)_{A \subset X}$*,* $(\mathcal{O}'_A)_{A \subset X}$ *famílias de ordenações de consequências de subconjuntos de X. As máquinas* $(\mathcal{P}(X) \times X, f_{(\mathcal{O}_A)_{A\subset X}})$ *e* $(\mathcal{P}(X) \times X, f_{(\mathcal{O}'_A)_{A\subset X}})$ *são isomorfas.*

Finalmente chegamos ao principal resultado desta pesquisa, a construção de um functor injetivo entre a categoria das lógicas enumeráveis e a categoria das máquinas, o que nos mostra que a categoria das lógicas enumeráveis é isomorfa à uma subcategoria de Maq.

Teorema 13. *A aplicação*

$$\begin{aligned} V : TrE &\longrightarrow Maq \\ (X, C) \in Ob(TrE) &\longmapsto (\mathcal{P}(X) \times X, C_{\mathcal{O}}) \\ T : (X, C_1) \to (Y, C_2) \in Mor(TrE) &\longmapsto V(T) : V((X, C_{1\mathcal{O}})) \to V((Y, C_{2\mathcal{O}})) \\ x \mapsto y \qquad\qquad &\qquad\quad (A, x) \mapsto (T(A), T(x)) \end{aligned} \tag{6}$$

é um functor injetivo.

Com isso provo que as máquinas generalizam as lógicas enumeráveis. E por fim mostro que máquinas de Turing e autômatos celulares são casos específicos de Máquinas.

Teorema 14. *Máquinas de Turing são casos específicos de máquinas.*

Teorema 15. *Autômatos Celulares são casos específicos de máquinas.*

4 Conclusões

Assim como com o desenvolvimento do estudo do campo da lógica viu-se uma necessidade para um formalismo em comum que permita o estudo de diferentes lógicas sob um mesmo paradigma, esse trabalho permite a expansão deste formalismo para incluir diversos outros sistemas, como máquinas de Turing e autômatas celulares. O que isso significa em termos qualitativos ainda resta ser pesquisado, mas no mínimo uma nova janela para a investigação sobre a conexão entre a ciência da computação, teoria dos autômatos e lógica se abre.

5 Referências Bibliográficas

1. FEITOSA, Hércules de Araújo. Traduções conservativas. 1997.
2. DA SILVA, J. J.; D'OTTAVIANO, I. M. L.; SETTE, A. M. Translations between logics.
3. FEITOSA, H. A.; D'OTTAVIANO, I. M. L. Conservative translations. Annals of Pure and Applied Logic, Amsterdam, v. 108, n. 1-3, p. 205-227, mar. 2001.
4. D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. de A. Translations Between Logics: A Survey. In: MRAS, G. M. et al. (Org.). Philosophy Of Logic And Mathematics. Berlin: Walter De Gruyter Gmbh, 2020. v. 27, p. 71-90.
5. D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. On Gödel's modal interpretation of intuitionistic logic. In: BÉZIAU, J.-Y. (Ed.). Universal Logic: an anthology – From Paul Hertz to Dov Gabbay. Heidelberg: Springer, 2012. p. 71-88.