XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

Divisores livres: critérios de liberdade no plano projetivo

Palavras-chave: álgebra comutativa, divisores livres, critério de Saito

Bolsista: Otávio Casagrande Ferrari
Orientador: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim
Departamento de Matemática
IMECC – UNICAMP

1 Introdução

Com o trabalho pioneiro intitulado *Theory of Logarithmic Forms and Logarithmic Vector Fields* [1] publicado na década de 80, o matemático Kyoji Saito introduziu o conceito de *divisores livres*. Apesar da teoria de Saito se passar no contexto complexo analítico, seu trabalho resultou posteriormente em aplicações em diversas áreas da matemática, como teoria de singularidades, geometria algébrica e álgebra comutativa.

O trabalho de Saito foi traduzido para o contexto algébrico por Aron Simis em [2], ao substituir o anel de germes de funções analíticas por um anel de polinômios sobre um corpo. Saito apresentou em seu artigo o que hoje é conhecido como *Critério de Saito* que, quando traduzido ao contexto algébrico, fornece um critério analítico para determinar se uma curva é livre (i.e. se ela é um divisor livre).

A base do estudo dos divisores livres são as derivações e o módulo formado por elas. Dado um anel R e S uma R-álgebra, uma derivação de S em S sobre R é uma aplicação $\theta : S \to S$ que satisfaz

$$\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y), \qquad \theta(xy) = \theta(x)y + x\theta(y), \qquad \theta(a) = 0, \tag{1}$$

para todos $x, y \in S$ e $a \in R$. O conjunto de todas as derivações de $\theta : S \to S$ é o R-módulo denotado por $\mathrm{Der}_R(S)$. Nosso interesse será no anel de polinômios $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Dado um ideal $I \subset R$, o módulo de derivações logarítmicas, denotado por $\mathrm{Der}_I(R)$, é o conjunto $\mathrm{Der}_I(R) = \{\theta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R) : \theta(I) \subseteq I\}$. Em particular, o módulo $\mathrm{Der}_f(R) = \{\theta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R) : \theta(f) \in (f)\}$ é denominado de *módulo de Saito* e um polinômio $f \in R$ é definido como sendo livre quando seu módulo de Saito é um R-módulo livre. Priorizaremos o estudo do caso de curvas planas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, isto é, o caso $R = \mathbb{K}[x,y,z]$ com f homogêneo.

De modo geral, a construção de famílias explícitas de divisores livres não é uma tarefa simples e ainda requer bastante estudo. Um exemplo de família de divisores livres irredutíveis chamada de sêxticas de Cayley foram construídas por Aron Simis em [3]. Um dos principais resultados acerca da caracterização de curvas livres é que em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}$ corpo algebricamente fechado) não existem divisores livres irredutíveis de grau 2 e 3, como foi mostrado por Aron Simis e Stefan Tohaneanu em [4]. Outro resultado frequentemente utilizado é baseado na existência de sizígias regulares para o ideal jacobiano J_f de um dado polinômio f, que foi introduzido por Tohaneanu em [5]. Ainda, no trabalho recente [6], Marcos Jardim, Abbas Nasrollah e Aron Simis estudaram o ideal e as sequências de Bourbaki e estabeleceram uma relação entre a liberdade de uma curva e seu grau de Bourbaki.

Objetivos

Este Projeto de Iniciação Científica tem como objetivo principal introduzir o aluno ao estudo de alguns critérios clássicos de liberdade e aplicações de tais critérios em exemplos de curvas algébricas planas no plano projetivo.

Referências

[1] Kyoji Saito. "Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields". Em: *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math* 27.2 (1980), pp. 265–291.

[2] Aron Simis. "Differential idealizers and algebraic free divisors". Em: *Commutative algebra*. CRC Press, 2005, pp. 233–248.

[3] Aron Simis. “The depth of the Jacobian ring of a homogeneous polynomial in three variables”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 134.6 (2006), pp. 1591–1598.

[4] Aron Simis e Stefan O. Tohaneanu. *Homology of Homogeneous Divisors.* 2012. arXiv: `1207.5862`.

[5] Stefan O. Tohaneanu. *On freeness of divisors on* $\mathbb{P}^2$. 2012. arXiv: `1203.2046`.

[6] Marcos Jardim, Abbas Nasrollah Nejad e Aron Simis. *The Bourbaki Degree of Plane Projective Curves.* 2023. arXiv: `2308.11467`.