

Análise de Barras com não-linearidade geométrica através do Método dos Elementos Finitos

Autor: Raphael Cagni Rosa - FEM, UNICAMP

Orientador: Prof. Dr. Carlos H. Daros - FEM, UNICAMP

Palavras-chave: Método do Elementos Finitos; Não-linear; Barras

0.1 Introdução

O objetivo final do projeto é a análise por Método dos Elementos Finitos (MEF) não linear. Para isso, foram introduzidos diversos métodos para a resolução dos problemas, dentre eles o método do trabalho virtual e o de Rayleigh-Ritz. Em seguida, iniciou-se o estudo do MEF e a elaboração de um código no MatLab capaz de resolver problemas lineares. Posteriormente, o estudo foi aprofundado para problemas de natureza não-linear.

0.2 Elementos Finitos

O modelo de elementos finitos pode ser desenvolvido para um grau arbitrário de interpolação:

$$u \approx u_h^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \quad (1)$$

onde ψ_j^e são as funções de interpolação de Lagrange de grau $n - 1$. Para $n > 2$, em que a forma fraca da equação deve ser modificada para incluir variáveis secundárias não nulas, se houver, nos nós interiores.

A integração por partes no processo do desenvolvimento da forma fraca para um elemento com nós interiores é realizada nos intervalos $(x_1^e, x_2^e), (x_2^e, x_3^e), \dots, (x_{n-1}^e, x_n^e)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_{x_i^e}^{x_{i+1}^e} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wf \right) dx - \left[w(x) a \frac{du}{dx} \right]_{x_i^e}^{x_{i+1}^e} \right\} \\ &= \int_{x_1^e}^{x_n^e} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wf \right) dx \\ &\quad - w(x_1^e) Q_1^e - w(x_2^e) Q_2^e - \dots - w(x_n^e) Q_n^e \end{aligned} \quad (2)$$

Onde x_i^{e-} e x_i^{e+} denotam os lados esquerdo e direito, respectivamente, do nó i , e:

$$\begin{aligned} Q_i^e &= \left[-a \frac{du}{dx} \right]_{x_i^{e-}}^{x_i^{e+}}, \\ Q_1^e &= \left[-a \frac{du}{dx} \right], \quad \dots, \quad Q_n^e = \left[a \frac{du}{dx} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, Q_i^e , para $i = 2, 3, \dots, n-1$, denota o salto no valor da variável secundária ao passar do lado esquerdo para o lado direito do i -ésimo nó. Esse valor é zero se nenhuma fonte externa for aplicada ao nó. Assim, para um elemento

com n nós, a forma fraca torna-se:

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left[a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu \right] dx - \int_{x_a}^{x_b} wf dx - \sum_{i=1}^n w(x_i) Q_i^e \quad (4)$$

Em seguida, desenvolvemos o modelo de elemento finito, então substituímos (1) por u e $w = \psi_i$, $w = \psi_j$, $\psi_i = \psi_j$ na forma fraca (4) para obter n equações algébricas da forma:

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left[a \frac{d\psi_n}{dx} \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j(x) \right) + c\psi_n \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j(x) \right) \right] dx - \psi_n f - \sum_{j=1}^n w(x_n) Q_j^e \quad (5)$$

A i -ésima equação do sistema de n equações pode ser escrita como:

$$0 = \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

em que

$$K_{ij}^e = \int_{x_a}^{x_b} \left(a \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c\psi_i^e \psi_j^e \right) dx \quad (7)$$

$$f_i^e = \int_{x_a}^{x_b} f \psi_i^e dx$$

Para o caso de interpolação linear com elementos finitos de dois nós obtemos:

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{f^e\} = \frac{f_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

em que a_e pode assumir diversos valores, dependendo do problema em que ele está sendo

usado. Ele pode assumir o valor de AE (em que A é a área da seção transversal da barra e E é o módulo de elasticidade) para casos de barras, k (coeficiente de condutividade térmica) para problemas de condução térmica, ϵ (constante dielétrica) para caso de eletroestática, dentre muitos outros físicos que podem assumir esta forma. Em casos de problema de condução de calor, o termo c_e pode assumir a função do termo convectivo de calor

0.3 Problemas não-lineares

Os problemas não-lineares surgem quando os coeficientes do modelo matemático, ou mesmo a função solução, dependem de maneira não linear das variáveis do problema. A equação geral que rege tais sistemas é:

$$-\frac{d}{dx} \left[a(u, x) \frac{du}{dx} \right] \quad (9)$$

$$+c(u, x)u = f(u, x), \quad \text{em } 0 < x < L$$

com condições de contorno mistas:

$$u(0) = u_0, \quad a(u, L) \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = Q_0 \quad (10)$$

0.3.1 Método de Newton-Raphson

Para resolver numericamente a equação não linear, aplicamos o método de Newton-Raphson, que consiste na linearização do sistema via expansão de Taylor. A forma geral do sistema após discretização é:

$$\mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad (11)$$

onde \mathbf{U} é o vetor de incógnitas nodais. A matriz tangente \mathbf{T} é definida como:

$$T_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial U_j} = K_{ij} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial K_{im}}{\partial U_j} U_m - \frac{\partial F_i}{\partial U_j} \quad (12)$$

A atualização da solução ocorre segundo:

$$\mathbf{U}^{(r)} = \mathbf{U}^{(r-1)} + \Delta \mathbf{U}, \quad \text{com } \mathbf{T} \Delta \mathbf{U} = -\mathbf{R} \quad (13)$$

0.3.2 Critérios de Parada

A iteração é encerrada quando a norma do erro entre as iterações consecutivas ou a norma do resíduo torna-se inferior a uma tolerância ϵ :

$$\frac{\|\mathbf{U}^{(r)} - \mathbf{U}^{(r-1)}\|}{\|\mathbf{U}^{(r)}\|} \leq \epsilon \quad \text{ou} \quad \frac{\|\mathbf{R}^{(r)}\|}{\|\mathbf{F}^{(r)}\|} \leq \epsilon \quad (14)$$

0.4 Resultados

0.4.1 Aplicação

Para a validação da eficiência do método dos elementos finitos, foram resolvidos problemas com códigos desenvolvidos em Matlab. Para isso, tomamos a equação não linear abaixo com as condições de contorno.

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} - 2u \frac{du}{dx} = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (15)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0.5 \quad (16)$$

A resolução do problema foi feita com interpolação linear e quadrática, afim de compará-las. Em seguida, o resultado foi comparado com a resposta exata, dada pela seguinte equação:

$$u(x) = \frac{1}{1+x} \quad (17)$$

A princípio, a malha foi feita com quatro elementos em interpolação linear e dois elementos em interpolação quadrática. O gráfico da solução está na imagem 1.

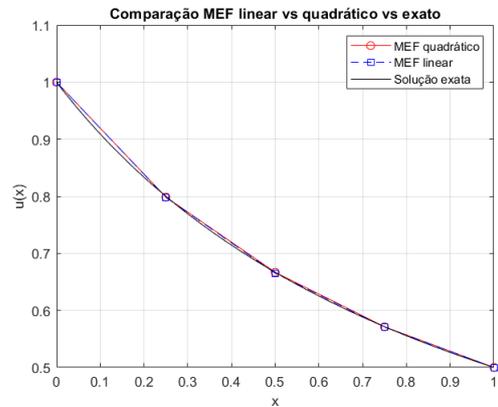


Figura 1 – Comparação MEF e solução exata

Os resultados dos pontos foram organizados em tabelas.

Tabela 1 – Tabela para interpolação quadrática

x	$u_{\text{quadrático}}$	u_{exato}	Erro absoluto
0.000	1.00000	1.00000	2.22×10^{-16}
0.250	0.79867	0.80000	1.33×10^{-3}
0.500	0.66676	0.66667	9.52×10^{-5}
0.750	0.57122	0.57143	2.08×10^{-4}
1.000	0.50000	0.50000	0

Tabela 2 – Tabela para interpolação linear

x	u_{linear}	u_{exato}	Erro absoluto
0.000	1.00000	1.00000	1.11×10^{-16}
0.250	0.79819	0.80000	1.81×10^{-3}
0.500	0.66512	0.66667	1.55×10^{-3}
0.750	0.57062	0.57143	8.12×10^{-4}
1.000	0.50000	0.50000	0

Como é possível perceber pelos dados das tabelas 1 e 2, é preciso de número de nós maior na interpolação linear para atingir um grau de precisão similar ao da interpolação quadrática. Ainda assim, uma interpolação da mesma ordem da equação diferencial consegue obter um erro absoluto ainda menor com menor custo computacional, o que valida sua eficácia.

Uma segunda abordagem foi feita para o mesmo problema, utilizando desta vez oito elementos com interpolação linear e quatro com quadrática. Os gráficos estão disponibilizados na imagem 2.

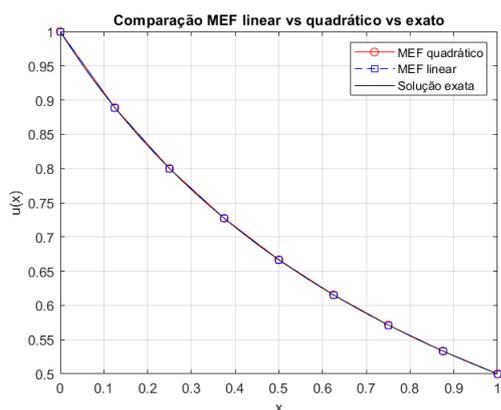


Figura 2 – Comparação MEF e solução exata

Os resultados para esta simulação estão nas tabelas 3 e 4.

Tabela 3 – Tabela para interpolação quadrática

x	$u_{\text{quadrático}}$	u_{exato}	Erro absoluto
0.000	1.00000	1.00000	3.33×10^{-16}
0.125	0.88875	0.88889	1.34×10^{-4}
0.250	0.80001	0.80000	8.52×10^{-6}
0.375	0.72723	0.72727	4.32×10^{-5}
0.500	0.66667	0.66667	6.36×10^{-6}
0.625	0.61537	0.61538	1.74×10^{-5}
0.750	0.57143	0.57143	2.90×10^{-6}
0.875	0.53332	0.53333	9.33×10^{-6}
1.000	0.50000	0.50000	0

Tabela 4 – Tabela para interpolação linear

x	u_{linear}	u_{exato}	Erro absoluto
0.000	1.00000	1.00000	3.33×10^{-16}
0.125	0.88855	0.88889	3.36×10^{-4}
0.250	0.79956	0.80000	4.43×10^{-4}
0.375	0.72683	0.72727	4.39×10^{-4}
0.500	0.66629	0.66667	3.81×10^{-4}
0.625	0.61509	0.61538	2.97×10^{-4}
0.750	0.57123	0.57143	2.00×10^{-4}
0.875	0.53323	0.53333	1.00×10^{-4}
1.000	0.50000	0.50000	0

Os resultados mais uma vez mostram o melhor desempenho para a interpolação quadrática, a qual obtém um erro menor usando metade dos pontos necessários para a interpolação linear.

0.4.2 Aplicação em uma barra não-linear

O objetivo final do estudo é a aplicação do MEF para a análise estrutural de uma barra com não linearidade geométrica.

O problema em questão faz referência a uma barra de comprimento L , seção de área uniforme A , feita por um material isotrópico linear elástico de módulo E . A barra é fixada em uma extremidade e sujeita a uma carga axial na outra ponta. O intuito é determinar a curva de deslocamento por carga, considerando que o problema é unidimensional.

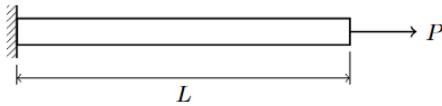


Figura 3 – Representação do problema

O desenvolvimento do problema ainda está em andamento.

0.5 Conclusão

O presente trabalho apresentou um estudo aprofundado do Método dos Elementos Finitos (MEF), com ênfase na formulação e resolução de problemas de natureza não linear. Iniciou-se com a introdução das formas fracas, interpolação de diferentes ordens e a construção das matrizes de rigidez e vetores de força para elementos finitos, tanto lineares quanto quadráticos.

Com a implementação de um código em *MatLab*, foi possível aplicar o MEF a um

problema unidimensional com não linearidade geométrica. A solução aproximada obtida com elementos de diferentes ordens foi comparada com a solução analítica, evidenciando que a interpolação quadrática apresenta desempenho superior à linear, mesmo utilizando um número menor de elementos. Isso confirma a maior eficiência dos elementos de ordem superior, principalmente em problemas que exigem maior precisão com menor custo computacional.

Além disso, a aplicação do MEF a um problema estrutural de uma barra com não linearidade geométrica — ainda em desenvolvimento — mostra-se promissora para a simulação de comportamentos reais mais complexos, com potencial para ser estendida a geometrias e condições de contorno mais gerais.

Como perspectiva futura, pretende-se concluir a implementação completa da análise da barra não linear.

0.6 Bibliografia

- [1] K. Morgan. O. C. Zienkiewicz. Finite Elements and Approximation. A Wiley-Interscience Publication (John Wiley Sons), 1976.