Otimização Topológica de Estruturas Elásticas Contínuas Multimaterial Levando em Conta Critérios de Rigidez e Sustentabilidade
CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Palavras-Chave: Otimização Topológica, *Compliance*, Pegada de Carbono

Autores:
Mayrllon Santana Guerra, FEM - UNICAMP
Prof^{o}. Dr^{o}. Renato Pavanello (orientador), FEM - UNICAMP

Introdução

A otimização topológica estrutural tem como objetivo encontrar a melhor distribuição de materiais em uma determinada região de projeto, considerando critérios mecânicos e restrições. Trata-se de um problema de otimização com restrições, onde as variáveis de projeto podem ser discretas ou contínuas. Neste trabalho, consideram-se estruturas contínuas no regime da elasticidade linear, formadas por múltiplos materiais com propriedades mecânicas distintas.

O critério principal adotado é a minimização da *compliance*, promovendo estruturas mais rígidas. Adicionalmente, impõem-se restrições de equilíbrio estático, volume/massa total da estrutura e pegada de carbono média dos materiais utilizados. A formulação e solução do problema utilizam o Método dos Elementos Finitos (MEF), com base na teoria da elasticidade linear. A técnica de interpolação SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) é empregada para modelar a distribuição contínua de materiais, combinada com um filtro para suavizar as soluções e evitar problemas numéricos (WANG; SIGMUND, 2024).

Metodologia

Modelagem Matemática

A formulação parte da equação constitutiva para o estado plano de tensões, baseada na Lei de Hooke generalizada, sob as hipóteses $\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. O comportamento do material é descrito por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \mathbf{D}\varepsilon, \tag{1}$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson, σ o vetor de tensões, ε o vetor de deformações, e $\mathbf{D}$ a matriz constitutiva do material (BENDSOE; SIGMUND, 2013).

Modelagem de elementos finitos

Na discretização do domínio, utilizam-se elementos quadrilaterais com funções de forma bilineares. Para um elemento quadrilateral, mostrado na Figura 1.

A matriz de rigidez elemental é obtida aplicando o método de Galerkin:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{D}\mathbf{B}\, d\Omega = \int_0^h \int_0^b \mathbf{B}^\top \mathbf{D}\mathbf{B}\, dx\, dy, \tag{2}$$

onde a matriz de derivadas das funções de forma é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

e $N_1 \ldots N_4$ são as funções de forma bilinear.

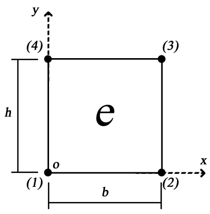

Figura 1 – Exemplo da numeração do elemento

Interpolação de Materiais e Penalização SIMP

A interpolação das propriedades dos materiais é feita via uma função baseada na p-norma:

$$\psi_i = \frac{\left(\sum_{j=1}^{N_M} (x_e^{(j)})^p\right)^{1/p}}{\sum_{j=1}^{N_M} x_e^{(j)} + \delta} \cdot x_e^{(i)}, \quad (4)$$

$$E_e = \sum_{i=1}^{N_M} (\psi_i)^n (E_i - E_{\text{void}}) + E_{\text{void}}, \quad (5)$$

onde $x_e^{(i)} \in [0,1]$: fração do material i no elemento e, E_i: módulo de elasticidade do material i, E_{void}: módulo do material vazio (muito pequeno), p: parâmetro da p-norma (geralmente 6), n: penalização SIMP (geralmente 3) e $\delta \ll 1$: valor pequeno para evitar divisão por zero (ZHENG et al., 2023).

Restrição Ambiental

A pegada de carbono média da estrutura é calculada como:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_M} f_i V_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{N_M} V_i(\mathbf{x})} \leq \phi_{\text{target}}, \quad (6)$$

em que f_i é o fator de emissão de CO_2 por unidade de volume do material i, $V_i(\mathbf{x})$: volume total do material i na estrutura e ϕ_{target} o valor máximo admissível para a média da pegada de carbono.

Problema de Otimização

O problema de otimização é formulado como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & c(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^\top \mathbf{U} && (7) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{U} = \mathbf{F}, && (8) \\ & \bar{V}_i(\mathbf{x}) \leq V_{i,\max} \quad \forall i = 1, \ldots, N_M, && (9) \\ & \phi(\mathbf{x}) \leq \phi_{\text{target}}, && (10) \\ & 0 \leq x_e^{(i)} \leq 1, && (11) \end{aligned}$$

Filtro de Suavização e Projeção

Para evitar padrões numéricos espúrios e instabilidades, aplica-se um filtro baseado em médias ponderadas:

$$\tilde{x}_e^{(i)} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_e} H_{ej} x_j^{(m)}}{\sum_{j \in \mathcal{N}_e} H_{ej}}, \quad (12)$$

onde $\tilde{x}_e^{(i)}$ é o valor suavizado da variável de projeto do material i no elemento e, $\mathcal{N}_e$ a vizinhança dos elementos ao redor do e, $H_{ej} = \max(0, r_{\min} - d_{ej})$ o peso calculado com base na distância d_{ej} entre os elementos e e j, $r_{\min}$ é o raio de influência do filtro (SIGMUND, 2001).

A seguir, aplica-se a suavização com função de Heaviside regularizada:

$$x_i^{\text{phys}} = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\tilde{x}_i - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1-\eta))}, \quad (13)$$

em que β é o parâmetro que controla a nitidez da transição (quanto maior, mais próximo de uma função degrau), $\eta \in (0,1)$ o ponto central da transição e x_i^{phys} o valor físico da densidade após suavização.

Cálculo das Sensitividades

Para que o algoritmo de otimização atualize as variáveis de projeto de forma eficiente, é necessário o cálculo das derivadas das funções objetivo e das restrições em relação às variáveis $x_e^{(i)}$. As derivadas calculadas são: da função objetivo (*compliance*, da restrição de volume, da pegada de carbono.

Atualização das Variáveis de Projeto

As variáveis de projeto $x_e^{(i)}$ são atualizadas a cada iteração utilizando o algoritmo MMA (Method of Moving Asymptotes), que se baseia em aproximações convexas locais do problema original e nas sensibilidades calculadas.

Resultados e Discussões

A estrutura exemplo considerada é uma viga engastada submetida a carregamentos simples, conforme ilustrado na Figura 2.

A malha utilizada cobre uma região de 8 metros na direção x e 5 metros na direção y, sendo discretizada com elementos quadrados de 0,05 $\times$ 0,05 metros. O método SIMP é aplicado com uma projeção tipo Heaviside de parâmetro inicial $\beta = 1$, que é dobrado a cada 50 iterações. Essa abordagem permite inicialmente maior flexibilidade no processo de otimização, facilitando a convergência, e posteriormente endurece a transição entre materiais, forçando a definição clara de fases.

O raio do filtro de sensitividade foi definido como equivalente a 3 elementos, enquanto o limite de movimentação das assíntotas no algoritmo MMA foi fixado em 0,1.

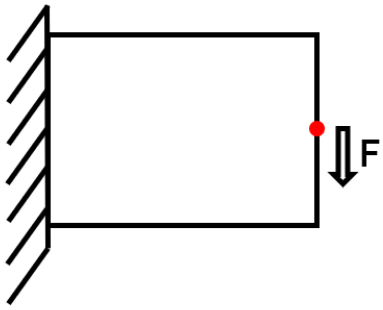

Figura 2 – Modelo da viga considerada para a otimização

Caso com um único material

Primeiramente, foi considerada a otimização com apenas um material, comparando-se os casos de uso exclusivo de alumínio e de aço sob as mesmas condições de carregamento. A Figura 3 mostra a configuração otimizada da estrutura para ambos os casos.

Figura 3 – Topologia otimizada utilizando apenas um material

Embora a topologia final seja idêntica, a *compliance* da estrutura difere entre os materiais. Isso ocorre devido às propriedades mecânicas distintas: o aço, com maior módulo de elasticidade, resulta em menor *compliance*, refletindo maior rigidez estrutural.

Caso com dois materiais e sem restrição ambiental

Em seguida, considera-se o uso de dois materiais (aço e alumínio) simultaneamente, sem restrição de pegada de carbono. O algoritmo de otimização naturalmente distribui os materiais de modo a minimizar a *compliance*, resultando em desempenho estrutural superior em relação aos casos com material único, como mostrado na Figura 5.

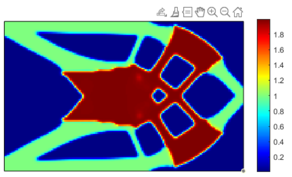

Figura 4 – Topologia otimizada com dois materiais (sem restrição de pegada de carbono)

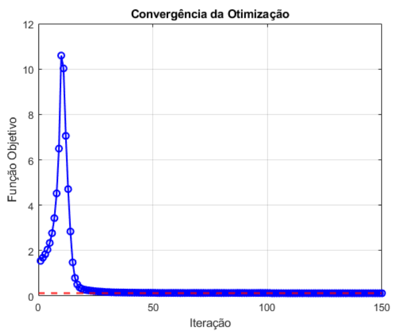

Figura 5 – Evolução da *compliance* com dois materiais (sem restrição ambiental)

Análise da pegada de carbono

A pegada de carbono média da estrutura é monitorada durante a otimização. Ao impor o limite de pegada de carbono como $\phi_{\text{target}} = 1{,}85$, que corresponde ao fator de emissão do aço, nenhuma restrição prática é imposta, e o algoritmo se comporta de forma idêntica ao caso sem restrição ambiental. A Figura 6 mostra a evolução da pegada nesse cenário.

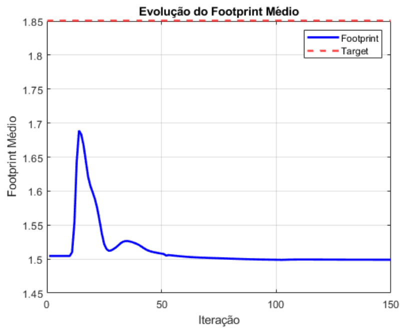

Figura 6 – Evolução da pegada de carbono para $\phi_{\text{target}} = 1{,}85$

É importante destacar que o alvo de pegada de carbono pode variar entre o mínimo, correspondente ao uso exclusivo de alumínio reciclado ($f = 0{,}5\,\text{kgCO}_2/\text{kg}$), e o máximo para o aço ($f = 1{,}85\,\text{kgCO}_2/\text{kg}$).

Restrição ativa de pegada de carbono

Ao reduzir a meta ambiental para $\phi_{\text{target}} = 1{,}4$, o algoritmo enfrenta maior dificuldade, e a restrição não é completamente satisfeita com a formulação atual. A Figura 7 apresenta a topologia resultante, e as Figuras 8 e 9 mostram respectivamente a evolução da *compliance* e da pegada de carbono ao longo das iterações.

Observa-se que a restrição não é atendida, indicando a necessidade de aprimoramento do método e dos parâmetros adotados. Esse comportamento reforça a sensibilidade do problema em relação à escolha dos parâmetros e à robustez do modelo de sensitividade.

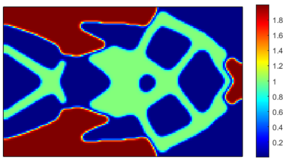

Figura 7 – Topologia otimizada com dois materiais sob restrição ambiental ($\phi_{\text{target}} = 1{,}4$)

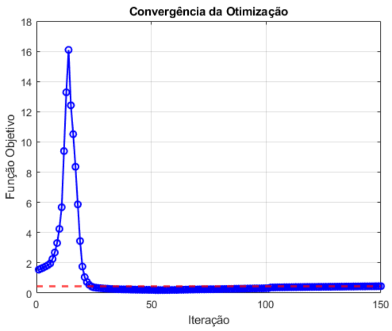

Figura 8 – Evolução da *compliance* com restrição de pegada de carbono

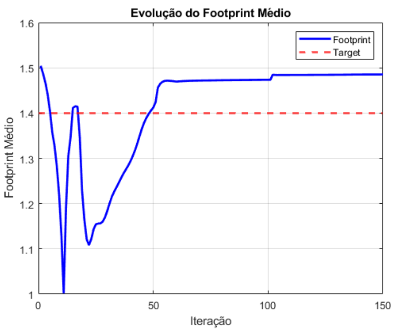

Figura 9 – Evolução da pegada de carbono com alvo $\phi_{\text{target}} = 1{,}4$

Conclusão

Foi desenvolvido e analisado um método de otimização topológica multimaterial aplicado a estruturas contínuas em regime elástico linear, incorporando simultaneamente critérios de rigidez e sustentabilidade ambiental. A formulação proposta combina a interpolação SIMP com projeção via função de Heaviside, filtro e atualização das variáveis de projeto via MMA, permitindo tratar a presença de múltiplos materiais e restrições ambientais.

Os resultados demonstraram que, na ausência de restrições ambientais, o algoritmo é capaz de explorar de forma eficiente as propriedades dos materiais disponíveis, alocando-os estrategicamente para maximizar a rigidez da estrutura. No entanto, a introdução de uma restrição ativa de pegada de carbono revelou limitações na formulação atual, evidenciando a dificuldade do método em satisfazer simultaneamente critérios mecânicos e ambientais mais restritivos.

A análise indicou que o desempenho da otimização é fortemente influenciado pela escolha dos parâmetros do filtro, da função de projeção e da meta ambiental. Com o estudo, a implementação de outras funções objetivos como uma união de *compliance* com pegada de carbono é possível de ser analisada.

Referências

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. 1

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, p. 120–127, 2001. 2

WANG, Y.; SIGMUND, O. Topology optimization of multi-material active structures to reduce energy consumption and carbon footprint. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 67, n. 1, p. 5, 2024. 1

ZHENG, R. et al. *An Efficient Code for the Multi-Material Topology Optimization of 2D/3D Continuum Structures Written in Matlab*. 2023. 2