



ANÁLISE DE MECANISMOS USANDO DINÂMICA COMPUTACIONAL DE CORPOS RÍGIDOS

Palavras-chave: Dinâmica de corpos rígidos. Método de Lagrangiano aumentado. Mecanismos.

Autores:
Benjamim A. T. Bertassoli
Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt FEM, Unicamp

1 Introdução

Este projeto de pesquisa desenvolveu um código em MATLAB para as análises cinemática e dinâmica rígida de mecanismos bidimensionais, utilizando os conceitos de dinâmica computacional apresentado em [1]. Um código para mecanismos bidimensionais com elementos de barra conectados por juntas de revolução e prismáticas foi implementado. Esse código também recebe restrições de acionamento que são funções do tempo. Uma interface gráfica para o programa bidimensional foi implementada em MATLAB, a fim de auxiliar no uso do programa. Inicialmente, as equações do movimento foram integradas numericamente com o auxílio da função ODE45, um método de Runge-Kutta incorporado de ordem 4(5). Atualmente, está sendo implementada a expansão do programa bidimensional para o espaço tridimensional com o auxílio da parametrização de rodrigues.

2 Metodologia

A seguir, será apresentado um breve resumo da base teórica da cinemática e dinâmica restritas de corpos rígidos bidimensionais acoplados por juntas [1]. Deve-se lembrar que um corpo é rígido quando os efeitos de deformação são desprezados. Tal fato significa que a distância entre dois quaisquer pontos do corpo permanece constante durante todo o movimento.

2.1 Análise Cinemática dos Mecanismos

A análise cinemática consiste na observação e estudo do movimento, desconsiderando os esforços que produzem tal movimento. A realização de uma análise cinemática completa de um sistema mecânico passa por três estágios: a análise de posição, velocidade e aceleração. Neste projeto, a análise será feita com a abordagem computacional comumente implementada para um grande número de corpos e juntas.

2.1.1 Cinemática Restrita

Os mecanismos são uma combinação entre corpos e juntas. O papel da junta mecânica é o de transmitir movimento. A maioria dos mecanismos é composto por acoplamentos, assim as restrições cinemáticas tornam-se fundamentais. Basicamente, as restrições são equações algébricas que dependem das coordenadas ou parâmetros do sistema, usadas para descrever o movimento do sistema.

2.1.2 Critério de Mobilidade

Inicialmente, todo sistema possui um número de graus de liberdade (GDL), denotado por n_d , dado por $n_d = xn_b$, em que n_b é o número de corpos no sistema. O valor de x é igual a 3 no espaço bidimensional e 6 no espaço tridimensional. Quando o sistema possui n_c equações de restrição linearmente independentes, o número de graus de liberdade é reduzido em n_c . Assim, o número de graus de liberdade em um mecanismo é dado por

$$n_d = xn_b - n_c. \quad (1)$$

Logo, para realizar a análise cinemática do mecanismo, deve-se impor n_d entradas que determinem o comportamento dos graus de liberdade restantes.

2.1.3 Restrições

O próximo conceito importante a ser mencionado é o de restrição cinemática. Um movimento sem restrição é aquele onde é permitida traslação e rotação nas três direções coordenadas. Por outro lado, um movimento restrito possui limitações quanto às direções de rotação e de traslação. As juntas mecânicas são as conexões entre dois corpos, de modo a restringir o movimento, permitindo-o apenas em determinadas direções. Cada tipo de junta permite um determinado movimento entre os corpos. A seguir, serão desenvolvidas as equações do **GROUND** e da **JUNTA DE REVOLUÇÃO** no espaço bidimensional, com o objetivo de exemplificar o princípio implementado neste trabalho.

GROUND: é um corpo com zero graus de liberdades, ou seja, esse corpo não possui nem traslação nem rotação. As equações que representam as restrições são:

$$R_x^i - c_1 = 0, \quad R_y^i - c_2 = 0, \quad \theta^i - c_3 = 0, \quad (2)$$

sendo c_1 , c_2 e c_3 constantes. É conveniente que o sistema de coordenadas fixo esteja no GROUND.

JUNTA DE REVOLUÇÃO: Uma junta de revolução, ilustrada na Figura 1, é uma conexão entre dois corpos que permite apenas a rotação entre eles. O ponto de rotação dos dois corpos é denominado como ponto de revolução da junta, P . A equação que descreve a junta de revolução entre os corpos i e j é dada por

$$\vec{r}_P^i = \vec{r}_P^j. \quad (3)$$

A equação anterior indica que a posição absoluta do ponto P , definida usando o sistema de referência do corpo i , é igual ao vetor posição do mesmo ponto representado usando o sistema de coordenadas do corpo j . Reescrevendo a expressão anterior usando a definição do vetor de posição absoluta vem que

$$\vec{R}^i + A^i \vec{u}_P^i - \vec{R}^j - A^j \vec{u}_P^j = 0, \quad (4)$$

onde

- \vec{R}^i e \vec{R}^j representam os vetores de posição absolutas das origens dos sistemas de coordenadas dos corpos i e j , respectivamente.
- A^i e A^j representam, respectivamente, as matrizes de transformação dos sistemas de coordenadas locais dos corpos i e j para o sistema fixo de coordenadas.
- \vec{u}_P^i e \vec{u}_P^j representam os vetores posição do ponto P representados nos sistemas de coordenadas locais dos corpos i e j , respectivamente.

Essa equação pode ser escrita como duas equações escalares que eliminam os dois graus de liberdade relativos à traslação entre os corpos. As duas equações são

$$R_x^i + \bar{x}_P^i \cos \theta^i - \bar{y}_P^i \sin \theta^i - R_x^j - \bar{x}_P^j \cos \theta^j + \bar{y}_P^j \sin \theta^j = 0, \quad (5)$$

$$R_y^i + \bar{x}_P^i \sin \theta^i + \bar{y}_P^i \cos \theta^i - R_y^j - \bar{x}_P^j \sin \theta^j - \bar{y}_P^j \cos \theta^j = 0. \quad (6)$$

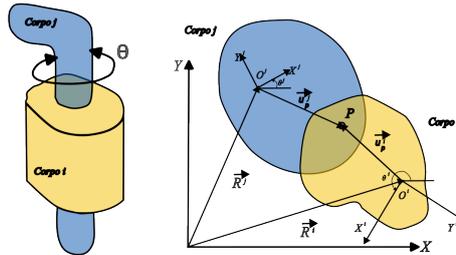


Figure 1: Junta de revolução e os sistemas de coordenadas dos corpos.

A descrição das demais juntas, bem como a formulação das restrições no espaço tridimensional, pode ser encontrada em [1].

2.1.4 Métodos Computacionais na Cinemática

Após o desenvolvimento das expressões das restrições cinemáticas, o próximo passo é aplicar esse conhecimento para calcular a posição, a velocidade e a aceleração dos mecanismos computacionalmente. As posições do sistema serão armazenadas no vetor \vec{q} , no formato coluna. Se o sistema possui n_b corpos planos, a dimensão de \vec{q} será $n = 3n_b$, ou seja, a posição de cada corpo no plano é expressa por 3 coordenadas. Assim, tem-se a seguinte representação para \vec{q}

$$\vec{q} = [R_x^1 \quad R_y^1 \quad \theta^1 \quad \dots \quad R_x^{n_b} \quad R_y^{n_b} \quad \theta^{n_b}]^T, \quad (7)$$

onde

- R_x^i e R_y^i são as coordenadas do centro de massa do i -ésimo corpo rígido;
- θ^i é o ângulo de orientação do i -ésimo corpo em relação ao referencial fixo.

Na análise de sistemas multicorpos, essas coordenadas não são independentes, e suas relações podem ser expressas em função das restrições cinemáticas, de modo a especificar as trajetórias do movimento. As restrições atribuídas, sejam de acionamento ou das juntas, são armazenadas em um vetor $\vec{C}(\vec{q}, t)$ como

$$\vec{C}(\vec{q}, t) = [C_1(\vec{q}, t) \quad C_2(\vec{q}, t) \quad \dots \quad C_{n_c}(\vec{q}, t)]^T \quad (8)$$

onde t o tempo e n_c o número de restrições.

Análise de Posição A equação que deve ser resolvida para análise da posição é obtida a partir da expansão em série de Taylor da Equação 8, sendo o método de Newton Raphson usado para encontrar a solução. Assim, o procedimento é calcular o vetor das diferenças de Newton e acrescentar ao vetor \vec{q} , até que a tolerância dada seja atingida. A expressão a ser resolvida é dada por

$$C_{q_i} \Delta \vec{q}_i = -\vec{C}(\vec{q}_i, t). \quad (9)$$

O vetor das diferenças de Newton $\Delta \vec{q}$ é expresso como $\Delta \vec{q} = [\Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \dots \quad \Delta q_n]^T$. Já a matriz Jacobiana C_{q_i} das restrições é dada por

$$C_{q_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial q_1} & \frac{\partial C_1}{\partial q_2} & \frac{\partial C_1}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial C_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial C_2}{\partial q_1} & \frac{\partial C_2}{\partial q_2} & \frac{\partial C_2}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial C_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_1} & \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_2} & \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_3} & \dots & \frac{\partial C_{n_c}}{\partial q_n} \end{bmatrix}.$$

Análise de Velocidade Na análise de velocidade, deriva-se a Equação 9 com relação ao tempo, obtendo-se

$$C_q \dot{\vec{q}} = -\vec{C}_t, \quad (10)$$

sendo C_q a matriz Jacobiana e \vec{C}_t o vetor com as derivadas parciais das equações de restrição com relação ao tempo.

Análise de Aceleração Na análise de aceleração, deriva-se a Equação 10 com relação ao tempo, obtendo-se

$$C_q \ddot{\vec{q}} = Q_d, \quad (11)$$

onde

$$Q_d = -(C_q \dot{\vec{q}})_q \dot{\vec{q}} - 2\dot{\vec{q}} C_{q_t} - C_{t_t}. \quad (12)$$

Os índices representam a variável na qual o vetor ou a matriz está sendo diferenciado. É importante salientar que todas essas componentes podem ser escritas em termos das coordenadas do sistema para cada uma das juntas.

2.2 Análise Dinâmica dos Mecanismos

A referência [1] apresenta a dedução das equações de Newton-Euler usando o princípio de D'Alembert. A aplicação das equações de Newton-Euler em um conjunto de multicorpos restritos, leva a seguinte equação na forma matricial

$$M\ddot{\vec{q}} = Q_e + Q_c, \quad (13)$$

onde

- M é a matriz de massa;
- $\ddot{\vec{q}}$ é o vetor com a aceleração das coordenadas do sistema;
- Q_e são os esforços externos aplicados;
- Q_c são os esforços de restrição.

2.2.1 Formulação Aumentada

A formulação aumentada obtém uma matriz esparsa e pode ser usada para gerar códigos gerais para resolver sistemas multicorpos. A formulação utiliza os esforços de restrição explicitamente nas equações dinâmicas. As relações de restrição mais as equações de movimentos são resolvidas para calcular as acelerações e os esforços de restrição como

$$\begin{bmatrix} M & C_q^T \\ C_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{q}} \\ \ddot{\vec{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e \\ Q_d \end{bmatrix}, \quad (14)$$

onde

- $\ddot{\vec{\lambda}}$ é vetor dos multiplicadores de Lagrange;
- Q_d é o termo que aparece na análise de aceleração.

Os multiplicadores de Lagrange $\ddot{\vec{\lambda}}$ são utilizados para o cálculo dos esforços de reação nas juntas. O vetor de aceleração $\ddot{\vec{q}}$ é integrado a cada instante para calcular o novo vetor de posição e de velocidade.

3 Resultados e Discussão

Apresenta-se agora os resultados obtidos com o programa computacional desenvolvido até o momento. Para isso, o problema do mecanismo biela-manivela apresentado na Figura 2 será resolvido através do programa. O momento externo M^2 aplicado na manivela é conhecido.

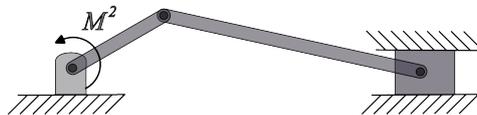


Figure 2: Mecanismo pistão-biela-manivela com momento M^2 sobre a manivela.

Após a configuração das características do mecanismo no programa computacional, podem ser geradas as telas com a análise cinemática e a análise de forças, representadas nas Figuras 3 e 4, respectivamente.

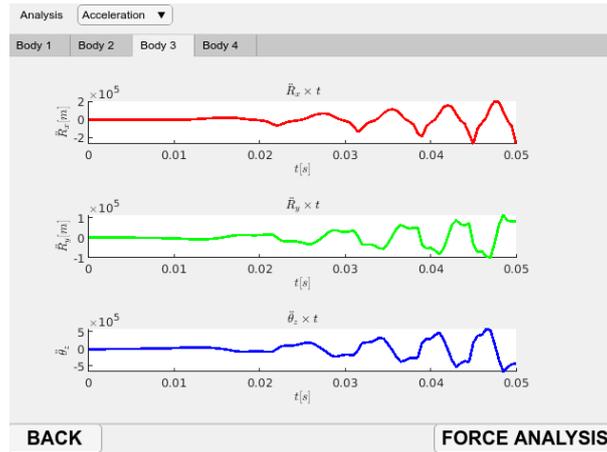


Figure 3: Tela da análise cinemática.

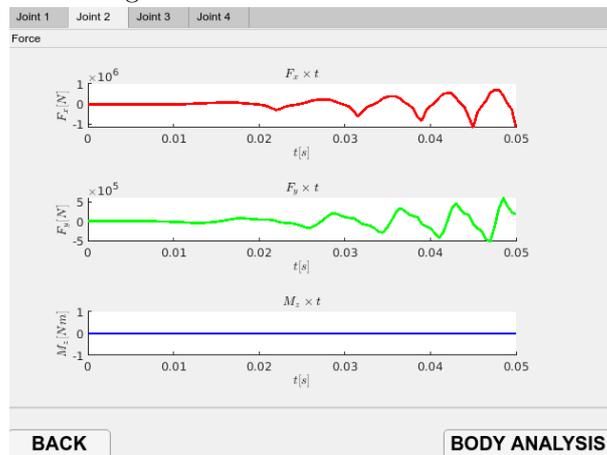


Figure 4: Tela da análise de força.

4 Conclusão

Este projeto de Iniciação Científica contribuiu significativamente para o desenvolvimento de conhecimentos em dinâmica computacional. Ao longo da pesquisa, foram construídas e implementadas equações com base na formulação de Newton-Euler, utilizando a linguagem de programação MATLAB. Durante esse processo, métodos numéricos como Newton-Raphson e Runge-Kutta foram estudados e aplicados, ampliando a compreensão sobre técnicas de solução de sistemas não lineares e integração numérica.

Além disso, houve um aprimoramento nas habilidades de programação, especialmente com o desenvolvimento de uma interface gráfica para o modelo implementado. Por fim, esta etapa do projeto prepara o terreno para a futura implementação de uma modelagem tridimensional da dinâmica computacional, o que requer uma parametrização apropriada dos ângulos de rotação.

References

- [1] A. A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, third edition, 2005.