



UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos, Otimização Topológica, Estruturas, Modelagem Numérica.

Autores(as):

MARINA GIMENEZ AMARAL, FECFAU - UNICAMP

Prof. Dr. NATHAN SHAUER (orientador), FECFAU - UNICAMP

Prof. Dr. HUGO LUIZ OLIVEIRA (coorientador), FECFAU - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

A Engenharia está diretamente relacionada à resolução de problemas e conta com o desenvolvimento e o estudo de diversos métodos para alcançá-la. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica para resolver problemas de engenharia e ciências aplicadas que podem ser modelados por meio de equações diferenciais parciais (OÑATE, 2009). Este é um método altamente confiável e com ampla gama de utilizações. O Método de Elementos Finitos consiste na divisão de um domínio físico em uma malha de elementos finitos, que podem ter formas variadas, incluindo formas geométricas simples. Então, para cada elemento, são definidas funções de forma que aproximam o comportamento das variáveis de interesse dentro do elemento. As equações governantes do problema são discretizadas usando essas funções de forma e um sistema de equações globais é formado combinando as contribuições de cada elemento. Resolvendo esse sistema por meio de módulos algébricos, são obtidos valores aproximados das variáveis de cada nó da malha. Oñate (2009) ressalta a importância de validar os modelos do Método de Elementos Finitos a fim de garantir a confiabilidade e a precisão dos resultados obtidos.

O Método dos Elementos Finitos oferece diversas vantagens na prática da engenharia, como flexibilidade na modelagem, precisão e detalhamento, visualização de resultados, possibilidade de análise paramétrica, entre outras. Esse método pode ser implementado, por exemplo, na otimização topológica de estruturas, visto que esta é uma técnica que busca encontrar a melhor distribuição de material dentro de um espaço definido, a fim de otimizar uma função objetivo sob certas condições e o MEF oferece a base para a análise estrutural. A otimização topológica tem como ponto de partida a formulação do problema e, em seguida, a representação da estrutura pela discretização do domínio do projeto em elementos finitos, em que cada elemento pode ser preenchido com material ou vazio. Além disso, utiliza diferentes algoritmos para atualizar a distribuição do material, que é iterativamente ajustada

com base na avaliação do desempenho estrutural. E, por fim, é realizada a interpolação de propriedades de materiais, a validação e a aplicação (BENDSØE, 1989).

METODOLOGIA:

Esse projeto tem como objetivo geral o estudo, a compreensão e a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) na otimização topológica de estruturas a partir da implementação computacional de modelos, a fim de desenvolver distribuições de material mais eficientes em domínios complexos.

A metodologia inicial desse projeto foi a revisão bibliográfica do material utilizado. É essencial estudar e compreender conceitos de álgebra linear, de equações diferenciais, de mecânica dos sólidos (lei de Hooke; equações diferenciais governantes), de análise estrutural (princípio do trabalho virtual; método da rigidez direta) e de linguagens de programação (Python; Wolfram; etc.). Além disso, foi realizado um estudo detalhado da literatura a respeito do Método de Elementos Finitos (MEF) e sobre otimização topológica, incluindo pesquisas técnicas, algoritmos e ferramentas de software disponíveis, com base em obras clássicas da área, como Oñate (2009), Becker (1981) e Bendsøe e Sigmund (2003).

Esses estudos incluíram a representação e resolução de um problema modelo baseado no livro de Becker, a análise do erro no Método dos Elementos Finitos, investigando a precisão da solução obtida em relação ao refinamento da malha, além da aplicação do Método de Galerkin e da resolução de equações diferenciais.

Em seguida, seguimos para o pré-processamento da estrutura, que consistiu na definição de estruturas, definição de materiais, aplicação das condições de contorno e geração

das malhas. Então, realizamos o processamento, ou seja, a execução dos programas de otimização de estruturas adaptados em Python, linguagem com biblioteca ampla para visualização e análise de dados e que possui alta capacidade de automação, integração com ferramentas de MEF e otimização de estruturas. O uso desse software facilitou a implementação eficiente de algoritmos e o gerenciamento de dados e resultados ao longo do projeto. O software Mathematica também foi utilizado, pois colabora com o fornecimento de uma plataforma de prototipagem eficaz para análise simbólica e numérica, além da visualização de resultados. Com ele, foi possível desenvolver e testar algoritmos de otimização topológica, como cálculos simbólicos de funções objetivo e gradientes de sensibilidade.

Por fim, utilizamos o software Visual Studio Code (VSCode), um editor de código-fonte que oferece um ambiente de desenvolvimento integrado versátil e eficiente para escrever, depurar e executar scripts e códigos em várias linguagens de programação.

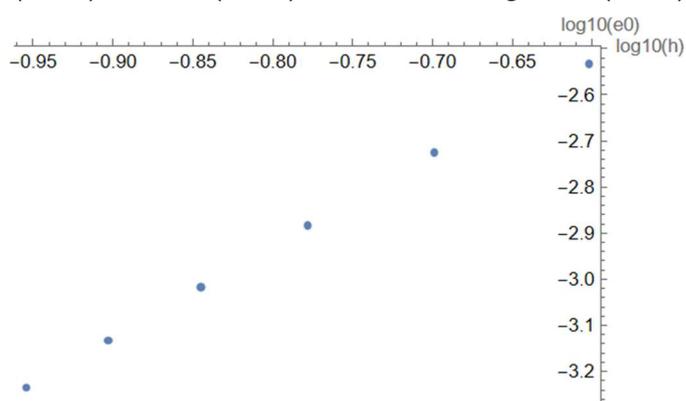


Figura 1: "Convergência no MEF"; Gráfico obtido na prática demonstra a relação entre o tamanho do elemento (h) e o erro (e_0). Foi obtida uma relação linear, em que a inclinação indica a ordem de convergência do método. No caso, obtivemos uma inclinação d

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

A partir do entendimento teórico e prático, foi implementado um código computacional capaz de resolver problemas pelo Método de Elementos Finitos. O código foi estruturado de forma a permitir o uso de malhas com qualquer número e tamanho de elementos desejado. Então, foram testadas diferentes configurações de malhas e condições de contorno para validar a implementação.

Em seguida, com o objetivo de criar uma ferramenta computacional que resolva sistemas treliçados a partir da inserção simplificada de dados, foram desenvolvidos códigos para resolução de

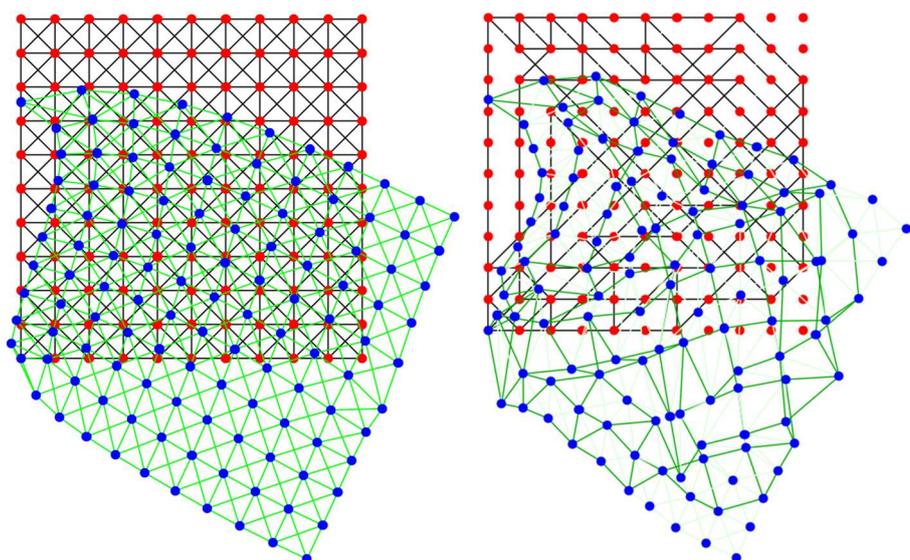


Figura 2: treliça original (em preto e vermelho) com apoio de segundo gênero no nó inferior esquerdo e apoio de primeiro gênero no nó superior esquerdo e sua deformada (azul e verde) obtidas pelo código implementado; à esquerda antes da implementação do código de otimização e a direita após

treliças pela aplicação do método da rigidez. Optou-se por utilizar treliças como estrutura a ser analisada inicialmente devido à sua formulação simplificada, que facilita o entendimento dos princípios de distribuição de material e permite testar métodos de forma mais intuitiva antes de lidar com estruturas mais complexas. A implementação foi estruturada para permitir que o usuário

insira apenas os nós e suas coordenadas, bem como os elementos e sua conectividade, a fim de simplificar o uso e ampliar a flexibilidade na modelagem de estruturas. Então, avançando na otimização topológica, implementamos um método de otimização iterativa, reduzindo a massa estrutural sem comprometer a integridade da treliça. O aprimoramento do código permite a inserção de critérios para remoção de barras menos solicitadas de forma repetida até que a forma otimizada da estrutura fosse alcançada. Por fim, desenvolvemos um código que simula a deformação dessas estruturas, contribuindo para uma análise mais detalhada do seu comportamento mecânico.

Na segunda parte do projeto foi realizado o estudo do código clássico de 99 linhas de otimização topológica, “A 99-line topology optimization code written in Matlab” (2001), desenvolvido por Ole Sigmund, originalmente escrito em MATLAB. Esse código é um algoritmo compacto que implementa a otimização topológica de estruturas bidimensionais usando o método SIMP e o Método dos Elementos Finitos. Esse código foi então reescrito em Python, mantendo sua lógica fundamental.

Seguindo a implementação inicial do código, realizou-se um estudo do problema de elasticidade linear, visando compreender a formulação matemática para determinação do campo de deslocamentos $u(x)$ que satisfaça $\nabla\sigma + f = 0$ em Ω . Sendo Ω o domínio do corpo; $u(x)$ os deslocamentos no ponto $x = (x, y)$; $\nabla\sigma$ o tensor de tensões; f a força de corpo. Este estudo incluiu a análise detalhada do tensor de

tensões e sua relação com as forças aplicadas e condições de contorno. Em seguida, foi realizada a derivação da matriz de rigidez para um elemento quadrilateral bilinear de 4 nós (Q4), utilizando as formulações forte e fraca do problema. A derivação foi automatizada no software *Excel* e feita com base em integrais de derivadas parciais das funções de forma, considerando o ponto de Gauss $(\xi, \eta) = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, elemento centrado na origem, módulo de elasticidade $E=1$ e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. Assim, obtivemos a matriz de rigidez K_e , no formato 8×8 , conforme implementado no código de 99 linhas de Sigmund. Além disso, também foi estudado o método de penalização SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), utilizando para interpolação de propriedades do material durante o processo de otimização.

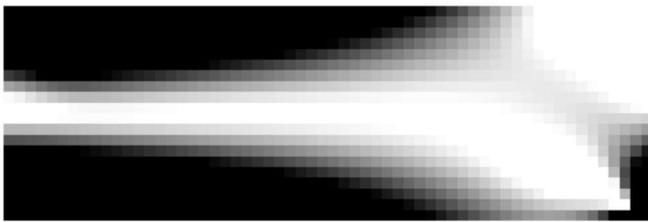


Figura 3: Otimização da estrutura pela adaptação do código em Python com o uso do filtro de sensibilidade do método SIMP

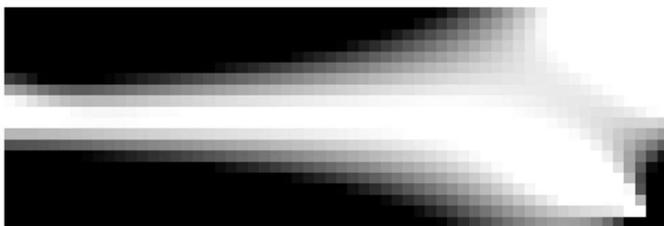
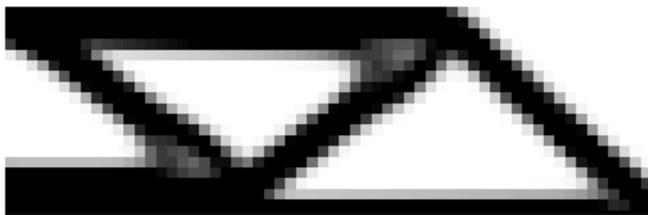


Figura 4: Otimização da estrutura pela adaptação do código em Python sem o uso do filtro de sensibilidade do método SIMP

adequadas à fabricação, em que as regiões com material se agrupam de forma coesa, formando domínios contínuos com transições graduais. Sem o uso do filtro, a distribuição de material tende a formar padrões irregulares e instáveis, caracterizados por regiões alternadas de elementos sólidos e vazios (*checkerboard*).

Então, foi realizado uma análise do funcionamento e da eficiência do filtro de sensibilidade implementado no código. Este filtro serve para suavizar o campo de sensibilidades, ou seja, as derivadas da função objetivo em relação às densidades dos elementos. Assim, são evitados problemas numéricos como o *checkerboarding* (tabuleiro de xadrez), que forma padrões de elementos alternados entre preto e branco, ou seja, elementos com densidade nula e densidade máxima, indicando ausência e presença de material, respectivamente. Isso indica a formação de elementos isolados fisicamente inviáveis no ponto de vista da engenharia e soluções altamente dependentes da malha, comprometendo a reprodutibilidade e confiabilidade. A fim de visualizar o funcionamento e a eficiência do filtro aplicado, o código foi alterado para funcionar sem o filtro e os resultados foram então comparados.

Com essa comparação, é possível observar que, com a aplicação do filtro, temos como resultado uma estrutura com formas mais contínuas, fisicamente plausíveis e mais

Além disso, nota-se que, com o uso do filtro, foram necessárias 94 iterações, enquanto sem o uso do filtro, foram necessárias apenas 65 iterações. Isso se deve porque o filtro impõe uma regularização ao problema, suavizando o caminho do otimizador e reduzindo oscilações abruptas, ganhando estabilidade, qualidade da solução e melhor interpretação estrutural, compensando esse custo adicional. A otimização sem filtro, mesmo que convergindo mais rapidamente, apresentou solução inviável na prática.

CONCLUSÕES:

Este trabalho teve como objetivo o estudo e a aplicação do Método de Elementos Finitos na otimização topológica de estruturas, buscando compreender tanto os fundamentos teóricos quanto sua implementação prática. A pesquisa envolveu a revisão de conceitos importantes da mecânica dos sólidos, análise estrutural e programação, além da adaptação e análise de um código clássico de otimização topológica. Foram desenvolvidos modelos computacionais em Python e Mathematica capazes de simular e otimizar estruturas discretizadas em malhas, com foco na distribuição eficiente de material. Foi realizada a comparação entre os resultados com e sem a aplicação do filtro de sensibilidade, que se mostrou essencial para garantir soluções mais estáveis, contínuas e viáveis na prática. Essa pesquisa contribui para o entendimento e a aplicação de técnicas numéricas avançadas na engenharia, reforçando sua importância para o desenvolvimento de estruturas mais eficientes e adequadas à fabricação.

BIBLIOGRAFIA

- [1] OÑATE, Eugenio. **Structural Analysis with the Finite Element Method**. Vol. 1. Barcelona: CIMNE, 2009. Disponível em: <[Structural Analysis with the Finite Element Method](#)>.
- [2] VITORINO, Alfredo. **Otimização Topológica de Estruturas Tridimensionais**. [Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada]. Universidade Estadual de Campinas, 2019. Disponível em: <[Otimização Topológica de Estruturas Tridimensionais](#)>.
- [3] BENDSØE, M. P. **Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem**. Structural Optimization, v.1, n.4, p. 193-202, 1989. Disponível em: <[Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem](#)>.
- [4] BECKER, A. **The Finite Element Method: Theory and Applications**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1981. Disponível em: <[The Finite Element Method: Theory and Applications](#)>.
- [5] BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications**. Berlin: Springer, 2003.
- [6] SIGMUND, O. **A 99-line topology optimization code written in Matlab**. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 21, n. 2, p. 120–127, 2001. Disponível em: <[backend.orbit.dtu.dk+15orbit.dtu.dk+15web.tecnico.ulisboa.pt+15](#)>.