Flexão de Vigas Usando a Teoria de Flexo-Torção e as Verificações das Normas Americana e Brasileira para Estruturas Metálicas

Palavras-Chave: flexo-torção, flexão oblíqua, vigas metálicas, não linearidade geométrica, estabilidade estrutural

Autores(as):
JOÃO VITOR DO NASCIMENTO SILVA, FECFAU – UNICAMP
Prof. Dr. LEANDRO PALERMO JUNIOR, FECFAU - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Vigas metálicas de seção transversal aberta são elementos estruturais presentes em diversas aplicações de engenharia, desde terças de cobertura até pontes rolantes. Frequentemente, estes componentes acabam sendo submetidos a flexão oblíqua, onde a análise estrutural se torna complexa. Para perfis de paredes finas, além da flexão, deve-se levar em consideração o fenômeno de torção, um comportamento acoplado conhecido como flexo-torção, classicamente estudada por Vlassov.

A análise desta interação é crucial do ponto de vista estrutural, pois as práticas de dimensionamento simplificadas podem não capturar adequadamente os efeitos críticos de instabilidade estrutural. Conforme demonstrado por Palermo Jr (1997), análises estruturais baseadas em teoria de primeira ordem ou no uso isolado do momento crítico de flambagem lateral podem gerar resultados não precisos e inseguros. Isso se deve ao desprezo do efeito de não linearidade geométrica (NLG), efeito este que pode amplificar significativamente os momentos fletores internos, especialmente no eixo de menor inércia da seção. Esta amplificação, se não considerada, pode subestimar as tensões reais e comprometer a segurança da viga, mesmo em regime elástico.

Neste contexto, o presente trabalho de iniciação científica tem como objetivo central o estudo aprofundado da teoria de flexo-torção que governa este comportamento. A pesquisa visa aplicar o formalismo matemático que descreve os deslocamentos da seção (v, w) e sua rotação (ϕ) para compreender como o acoplamento entre os planos de flexão origina os momentos de segunda ordem. O estudo busca, portanto, analisar quantitativamente os efeitos da não linearidade geométrica apontados por Palermo Jr. (1997) e, futuramente, comparar os resultados obtidos pela teoria com as verificações de normas de projeto.

METODOLOGIA:

A abordagem metodológica deste trabalho é de natureza teórica e analítica, tendo como base a teoria de flexo-torção para barras de seção aberta de Vlassov. A primeira etapa consistiu no desenvolvimento e análise detalhada da própria teoria. Partindo de hipóteses básicas — como a indeformabilidade da seção em seu plano e a consideração do empenamento axial —, a partir disso, foi deduzido o campo de deslocamentos, que inclui a função de empenamento setorial $\omega(s)$ como um grau de liberdade adicional. De modo que, a partir deste campo, foram derivadas as expressões para as tensões normais (σ), que incorporam o efeito do bimomento (B), e as tensões de cisalhamento (τ), que somam os efeitos da torção livre e de empenamento. Pela integração destas tensões, foram estabelecidas as relações entre os esforços internos e as derivadas dos deslocamentos.

A partir desse desenvolvimento, obteve-se o sistema de equações diferenciais de equilíbrio que descreve o comportamento da viga.

$$E \cdot I_z \cdot v_d^{IV} - M \cdot \cos\alpha \cdot \phi_D'' = 0 \quad (1)$$

$$E \cdot I_y \cdot w_d^{IV} + M \cdot sen\,\alpha \cdot \phi_D'' = 0 \quad (2)$$

$$E \cdot I_\omega \cdot \phi_d^{IV} - G \cdot I_t \cdot \phi_D'' + M \cdot sen\,\alpha \cdot w_D'' - M \cdot \cos\alpha \cdot v_D'' - \\ - \{[2 \cdot M \cdot sen\,\alpha \cdot (K_y - y_d) + 2 \cdot M \cdot \cos\alpha \cdot (K_z - z_d)]\} \cdot \phi_D' = 0 \quad (3)$$

Nestas equações, Iω é o momento setorial de inércia, It é o momento de inércia à torção, e v_d, w_d, ϕ_d são os deslocamentos do centro de cisalhamento. Os coeficientes Ky e Kz são as coordenadas do centro do círculo de estabilidade, definidas pelas seguintes integrais:

$$K_y = \frac{1}{2 \cdot I_z} \int_A y \cdot (y^2 + z^2) \cdot dA \quad (4)$$

$$K_z = \frac{1}{2 \cdot I_y} \int_A z \cdot (y^2 + z^2) \cdot dA \quad (5)$$

Os termos que acoplam os momentos fletores (My, Mz) com a rotação de torção (ϕ_D) são a manifestação da não linearidade geométrica, cujo efeito é o foco da investigação. Conforme demonstrado por Palermo Jr. (1997), este acoplamento provoca uma amplificação dos momentos internos, especialmente quando o carregamento se aproxima dos limites de instabilidade da viga.

Para analisar estes efeitos de maneira mais prática, a metodologia empregará uma abordagem numérica, utilizando o método dos elementos finitos para resolver o sistema de equações para diferentes seções, condições de contorno e carregamentos que configurem a flexão oblíqua. Os resultados obtidos serão os momentos finais de segunda ordem, que serão utilizados para cálculos das tensões analisando seus resultados para primeira ordem e para segunda ordem. Por fim, estes resultados teóricos serão sistematicamente comparados com os critérios prescritos pelas normas americana (ANSI/AISC) e brasileira (NBR 8800), a fim de avaliar a precisão e a segurança das abordagens normativas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Visando demonstrar e quantificar os efeitos da NLG discutidos na metodologia, esta seção apresenta os resultados numéricos obtidos pela teoria de flexo-torção. De modo que serão analisadas vigas com diferentes seções transversais (dupla simetria e monossimétrica) e condições de carregamento, permitindo assim uma avaliação mais abrangente.

EXEMPLO 1: Analisando o caso de uma viga biapoiada de seção "I" duplamente simétrica com vão de 800 cm, momento crítico em relação ao eixo de maior inércia igual a 4883 $kN \cdot cm$ e propriedades geométricas citadas em Palermo Jr. (1997).

A análise consistiu em aplicar um momento Mz crescente, combinado com um momento inicial My pequeno, apresentando valores de 50, 100 e 400 $kN \cdot cm$. De modo que os resultados demonstram que, para valores baixos de Mz, a ampliação do momento no plano de menor inércia tende a ser modesta.

	My = 50			My = 100			My = 400		
Mz inicial aplicado	My final	Mz final	Bimomento	My final	Mz final	Bimomento	My final	Mz final	Bimomento
800	52,00	800,00	-24,91	103,00	800,00	-49,82	413,00	794,00	-199,37
1600	57,00	1.600,00	-55,12	114,00	1.599,00	-110,24	457,00	1.586,00	-441,17

2400	69,00	2.400,00	-99,73	138,00	2.398,00	-199,46	551,00	2.375,00	-798,27
3200	95,00	3.199,00	-182,94	189,00	3.197,00	-365,90	757,00	3.155,00	-1.464,58
4000	172,00	3.998,00	-414,47	343,00	3.994,00	-828,98	1.374,00	3.903,00	-3.319,65
4800	1.755,00	4.782,00	-5.080,50	3.512,00	4.729,00	-10.166,27	14.189,00	3.651,00	-41.090,19
4880	38.379,00	4.487,00	-112.926,55	77.624,00	3.291,00	-228.404,38	400.968,00	-27.953,00	-1.180.243,12

Tabela 1: Momentos finais obtidos em $kN \cdot cm$.

Nota-se, portanto, que, à medida que o momento aplicado Mz se aproxima do momento crítico, o aumento da flexão no eixo de menor inércia torna-se cada vez mais significativo. Pequenos incrementos em Mz resultam em aumentos expressivos em My, o que evidencia a necessidade de se considerar o eixo de menor inércia no dimensionamento, pois sua desconsideração pode levar a uma condição insegura no que se refere às tensões na peça. A Tabela 1 também revela que, enquanto My é amplificado, o momento Mz final sofre um leve decréscimo, e o Bimomento cresce negativamente de forma acentuada, indicando a presença de grandes tensões normais de empenamento. A principal implicação para o projeto é a constatação de que, para valores de Mz superiores a 80% do seu valor crítico, a estrutura entra em um regime de grandes deslocamentos, tornando o projeto instável e o dimensionamento de primeira ordem perigosamente enganoso.

EXEMPLO 2: A segunda análise é realizada em uma viga de seção "U" monossimétrica, com vão de 620 cm. Para este perfil, o momento crítico em relação ao eixo de maior inércia é igual a 1870 kN.cm. A análise novamente consistiu na aplicação de um momento Mz crescente, combinado a um pequeno momento inicial My (19, 38 e 76 kN.cm).

Os resultados para a seção monossimétrica seguem a mesma tendência observada no caso duplamente simétrico, porém de forma ainda mais acentuada.

	My = 19		My = 38		My = 76	
Mz inicial aplicado	My final	Mz final	My final	Mz final	My final	Mz final
350	20	350	40	350	79	349
650	22	650	44	650	89	648
950	27	950	55	949	110	947
1250	38	1250	77	1249	157	1245
1550	72	1549	147	1547	312	1538
1850	2071	1829	84953	106	-4346	2032
1870	-2288	1893	-2217	1916	-2153	1961

Tabela 2: Momentos finais obtidos em $kN \cdot cm$.

A discussão teórica para este caso é análoga à do exemplo anterior: a proximidade de Mz ao seu valor crítico diminui a rigidez torcional efetiva da viga, gerando grandes rotações que amplificam os momentos de segunda ordem. Em seções monossimétricas, esse efeito pode ser ainda mais pronunciado devido à posição do centro de cisalhamento não coincidir com o centro de gravidade, introduzindo acoplamentos inerentes.

EXEMPLO 3: O terceiro exemplo foca na comparação direta entre o momento resistente de um perfil “I” com especificação (10,2x6,8x4,8x7,4 cm), obtido através da norma brasileira (NBR 8800), e o valor correspondente obtido pela teoria de Vlassov. O objetivo desta análise é evidenciar as diferenças conceituais entre as duas abordagens e suas implicações na segurança do dimensionamento.

Primeiramente, analisou-se o momento fletor resistente do perfil com base nos procedimentos estabelecidos pela NBR 8800 que considera apenas o eixo de maior inércia (nesse caso o eixo z),

desconsiderando, portanto efeitos acoplados entre os dois planos de flexão. Essa simplificação leva a obtenção de um valor de momento resistente baseado unicamente no comportamento da viga em um plano dominante.

Em seguida, o momento da mesma viga é determinado utilizando a teoria de flexo-torção de Vlassov. Este método, conforme detalhado na metodologia, leva em consideração o acoplamento entre os planos de flexão e o efeito combinado da rigidez à torção pura (It) e da rigidez ao empenamento (Iω). A análise de Vlassov, portanto, captura como a interação entre as rigidezes em ambos os eixos afeta a capacidade de resistir à instabilidade.

	Norma		Vlassov			Norma		Vlassov	
alpha	Mz	My	Mz	My	alpha	Mz	My	Mz	My
0	0,00	3,525	0,000	24,49	45	8,19	2,507	8,187	8,19
5	2,08	3,404	2,080	23,78	50	8,33	2,376	8,326	6,99
10	3,87	3,290	3,867	21,93	55	8,43	2,232	8,430	5,90
15	5,24	3,179	5,236	19,54	60	8,51	2,070	8,510	4,91
20	6,22	3,071	6,221	17,09	65	8,57	1,885	8,570	4,00
25	6,91	2,964	6,914	14,83	70	8,62	1,667	8,615	3,14
30	7,40	2,856	7,402	12,82	75	8,65	1,402	8,648	2,32
35	7,75	2,745	7,749	11,07	80	8,67	1,068	8,670	1,53
40	8,00	2,630	8,001	9,54	85	8,68	0,625	8,682	0,76
					90	8,69	0,000	8,687	0,00

Tabela 3: Momentos obtidos por Norma e por Vlassov em $kN \cdot cm$.

A comparação entre a norma brasileira e a teoria de Vlassov evidencia que a abordagem normativa adota um critério conservador, favorecendo a segurança. Enquanto a norma utiliza procedimentos simplificados que podem impor limites mais restritivos para casos complexos como a flexão oblíqua, a teoria de Vlassov oferece um modelo mais detalhado. Ao considerar a contribuição de ambos os eixos de inércia (Iy e Iz), a análise de Vlassov permite um cálculo mais preciso da capacidade real da viga, podendo resultar em um momento crítico de instabilidade superior ao admitido pela norma. Dessa forma, uma análise rigorosa como a de Vlassov, conforme discutido por Palermo Jr. (1997), possibilita um dimensionamento mais preciso e potencialmente mais econômico, sem sacrificar a segurança.

EXEMPLO 4: Assumindo M como sendo o momento fletor atuante em um plano com um ângulo α em relação ao eixo z, define-se suas componentes como $M_z = M \cdot sen\,\alpha$ e $M_y = -M \cdot cos\,\alpha$. Além disso, consideramos as seguintes expressões para os deslocamentos e rotações: $v_d = A \cdot sen\,\frac{n\pi}{l}$, $w_d = B \cdot sen\,\frac{n\pi}{l}$ e $\phi_d = C \cdot sen\,\frac{n\pi}{l}$.

Ao adotar o eixo y como eixo de simetria e realizar substituições nas equações diferenciais, a resolução do determinante obtido segundo Vlassov [1], tem-se:

$$M = P_y \cdot (K_y - y_d) \pm \sqrt{(K_y - y_d)^2 + i_D^2 \cdot \frac{P_\omega}{P_y}} \qquad (6)$$

Caso o momento aja no plano do eixo z, perpendicular ao eixo de simetria da seção, tem-se:

$$M = \pm\sqrt{P_z \cdot P_\omega \cdot i_D^2} \qquad (7)$$

Para o caso particular de viga de abas largas com abas iguais(seção I), tem-se a seguinte equação:

$$I_{\omega} = \int \omega^2 \cdot dF = \frac{I_y \cdot (d - t_f)^2}{4} \tag{8}$$

onde I_y é o momento de inércia em relação ao eixo y e $(d - t_f)$ é a altura da alma.

Realizando as devidas substituições na equação (8.1) e assumindo $(K_y - y_d) = 0$, tem-se:

$$M = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{E \cdot I_y \cdot G \cdot I_t} \cdot \sqrt{1 + \frac{E \cdot I_y \cdot (d - t_f)^2 \cdot \pi^2}{4 \cdot G \cdot I_t \cdot l^2}} \tag{9}$$

Utilizando as equações (8.1) e (8.2) e assumindo $I_{\omega} = 0$, obtemos a equação:

$$M = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot E \cdot I_y \cdot \left[(K_y - y_d) \pm \sqrt{(K_y - y_d)^2 + \frac{G \cdot I_t \cdot l^2}{E \cdot I_y \cdot \pi^2}}\right] \tag{10}$$

CONCLUSÕES:

O presente trabalho permitiu a análise aprofundada da flexão oblíqua em vigas metálicas com seção aberta, com foco nos efeitos da não linearidade geométrica (NLG) e no acoplamento entre os planos de flexão, portanto levando em consideração ambos os eixos de inércia, aspectos centrais da teoria de Vlassov. Os resultados mostraram que, mesmo em regime elástico, a consideração dos efeitos de segunda ordem pode aumentar significativamente os momentos fletores finais, especialmente para o caso no eixo de menor inércia, de modo que caso não sejam considerados, podem vir a comprometer a segurança da estrutura.

A comparação entre os métodos de Vlassov e da norma brasileira NBR 8800 indicou que ao considerar apenas o eixo de maior inércia para dimensionamento, tende a subestimar os esforços atuantes em situações de flexão oblíqua. Porém, a abordagem de Vlassov se mostra mais precisa por incorporar a interação entre os dois principais eixos e efeitos como de empenamento e torção.

Conclui-se que, para garantir maior segurança e confiabilidade no dimensionamento de vigas metálicas submetidas à flexão oblíqua, é fundamental considerar os efeitos da não linearidade geométrica nas análises estruturais, especialmente em situações próximas ao colapso por instabilidade, bem como o efeito simultâneo dos momentos fletores em relação aos dois eixos principais de inércia, conforme apresentado por Vlassov. A teoria de Vlassov, portanto, constitui uma abordagem analítica consistente e adequada para a análise de estruturas submetidas à flexão oblíqua com influência de efeitos de segunda ordem.

BIBLIOGRAFIA

[1] Palermo Junior, L. . **Flexão Oblíqua de Vigas Metálicas com Seção Transversal Aberta**. In: XXVIII Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, 1997, São Carlos. XXVIII Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, 1997. v. 3. p. 1071-1080.

[2] Vlassov, B. Z., **Pieces Longues en Voiles Minces**, Editiones Eyrolles, Paris, França, 1962.

[3] Palermo Jr, Leandro, **Esforços de Flexão e Flexo-Torção em Teoria de Segunda Ordem**, Orientador Munir Rachid, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de S. Carlos de USP, 151p, 1985.