O PROBLEMA DO EMPACOTAMENTO DE SUBGRAFOS EM GRAFOS

Palavras-Chave: *Teoria dos Grafos, Complexidade Computacional, Empacotamento de Caminhos*

Gustavo Henrique Sencio de Souza, IC – UNICAMP
Prof. Dr. Santiago Valdés Ravelo (orientador), IC – UNICAMP

Introdução

A Teoria dos Grafos tem-se mostrado fundamental na modelagem e resolução de uma vasta gama de problemas em diversas áreas, desde a otimização de redes de transporte até o design de circuitos eletrônicos e a análise de interações sociais. Dentro desse contexto, os problemas de empacotamento e cobertura em grafos representam uma classe particularmente desafiadora e relevante. Em sua essência, esses problemas buscam encontrar subconjuntos ótimos de elementos (vértices, arestas ou caminhos) que satisfaçam certas condições, minimizando ou maximizando alguma métrica.

A complexidade desses problemas frequentemente reside em sua natureza combinatória, que os classifica como NP-difíceis. Isso implica que, para instâncias de tamanho razoável, encontrar uma solução ótima em tempo polinomial é considerado computacionalmente inviável. Consequentemente, é interessante o desenvolvimento de algoritmos de aproximação, que, embora não garantam a solução ótima, fornecem soluções ”boas o suficiente”dentro de limites de tempo aceitáveis.

Neste texto, apresentamos o progresso de um estudo de iniciação científica focado em duas variações do problema de empacotamento e cobertura em grafos: a **Cobertura Mínima de Caminhos com Cores Distintas (DCPC)** e o **Empacotamento Máximo de Caminhos Arco-Íris (MRPP)**. A particularidade desses problemas reside na introdução de uma coloração nos vértices do grafo, adicionando uma camada de restrição e complexidade que os distingue dos problemas clássicos. Investigar esses problemas não apenas contribui para o avanço teórico da Teoria dos Grafos e da Complexidade Computacional, mas também abre portas para aplicações em cenários onde a diversidade ou a exclusividade de atributos (representados pelas cores) é crucial.

Metodologia

O período inicial do projeto foi dedicado à aquisição e aprofundamento de conhecimentos fundamentais em **Algoritmos de Aproximação** e **Complexidade Computacional**. Este esforço foi crucial, dado que os problemas a serem estudados se inserem diretamente nessas áreas. As referências bibliográficas primárias que guiaram essa fase foram os livros ***Uma Introdução Sucinta a Algoritmos de Aproximação*** e ***The Design of Approximation Algorithms*** [1 e 2]. Além dessas referências centrais, outras obras com

conteúdo mais introdutório foram consultadas para solidificar os fundamentos da ciência da computação e da teoria dos grafos, ***Introduction to Algorithms*** e ***Introduction to Graph Theory*** [3 e 4].

Essa fase de capacitação não se limitou à leitura; envolveu também o estudo ativo de exemplos e exercícios, visando à aplicação prática dos conceitos teóricos. A compreensão profunda desses tópicos é vital para a identificação de possíveis reduções entre problemas e para a eventual concepção de algoritmos para as variações estudadas.

Adicionalmente à consulta de fontes primárias na literatura, o aluno buscou aprofundar seu conhecimento na área ao matricular-se na disciplina MC748 (Algoritmos de Aproximação). Ministrada pelo orientador, essa medida teve como propósito fortalecer sua capacitação teórica e prática, antecipando potenciais necessidades para o desenvolvimento da pesquisa.

Paralelamente à revisão teórica, a metodologia envolveu a formalização matemática de dois problemas de otimização em grafos coloridos. Com suas definições bem estabelecidas, o foco passou a ser a demonstração da NP-dificuldade dessas formulações e de suas variações. Para isso, foi conduzido um estudo de problemas clássicos já conhecidos por sua complexidade, assim como de técnicas de redução polinomial, com o intuito de identificar estratégias aplicáveis aos problemas em análise.

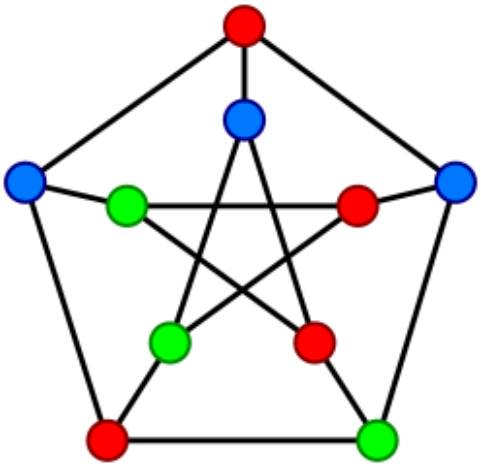

Figura 1: *Exemplo de grafo com coloração nos vértices. Fonte: Wikipedia – Graph coloring.*

Resultados e Discussão

Os problemas abordados neste trabalho podem ser descritos da seguinte forma:

1. **Cobertura Mínima de Caminhos com Cores Distintas (DCPC)**: Um problema de minimização que busca cobrir todos os vértices de um grafo colorido usando o menor número possível de caminhos disjuntos, com a restrição de que nenhum caminho pode ter vértices de cores repetidas.

2. **Empacotamento Máximo de Caminhos Arco-Íris (MRPP)**: Um problema de maximização que visa encontrar o maior número possível de caminhos disjuntos, onde cada caminho deve conter todas as cores presentes no grafo.

É importante destacar que esses problemas também podem ser formulados com a coloração atribuída às arestas em vez de aos vértices, o que abre novas frentes de investigação.

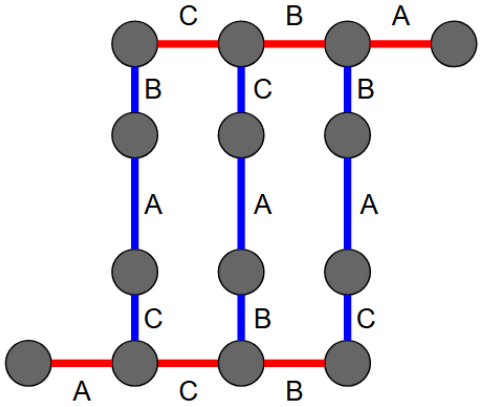

Figura 2: *Exemplo de solução para o DCPC em um grafo com coloração nas arestas.*

A etapa subsequente foi a reformulação desses problemas como problemas de decisão. Esta conversão é um procedimento padrão em Complexidade Computacional, pois permite a aplicação de técnicas de redução polinomial para provar que um problema é NP-difícil. Para tal, cada problema de otimização foi transformado em uma questão de ”sim ou não”que verifica a existência de uma solução que atenda a um determinado limiar q.

A prova de NP-dificuldade para ambos os problemas foi realizada através de uma redução polinomial a partir do **Problema do Caminho Hamiltoniano (HP)**, conhecido por ser NP-difícil desde o trabalho de Richard Karp em 1972 [5]. A estratégia da redução envolveu a construção de uma instância do problema alvo (DCPC ou MRPP) a partir de uma instância arbitrária do HP, de tal forma que a resposta para a instância original do HP é SIM se, e somente se, a resposta para a instância construída do problema alvo também for SIM.

É importante destacar que, para grafos com **duas cores**, o problema DCPC pode ser resolvido em tempo polinomial por meio de uma adaptação de algoritmos de *matching*. Atualmente, estamos desenvolvendo uma redução do **Problema do Acoplamento Tridimensional (3DM)** para demonstrar que o DCPC é NP-difícil mesmo para grafos com **três cores**. Acreditamos que uma estratégia de redução similar possa ser aplicada ao MRPP para provar sua NP-dificuldade com três cores, embora ainda estejamos investigando sua complexidade para o caso de duas cores. Por fim, já concebemos uma redução que, se o DCPC for comprovadamente NP-difícil para três cores, implicará automaticamente sua NP-dificuldade para qualquer número $k \geq 3$ de cores.

Conclusão

O trabalho realizado até o momento estabeleceu uma sólida base teórica, culminando na formalização e análise de complexidade de dois problemas de otimização em grafos coloridos: a **Cobertura Mínima de Caminhos com Cores Distintas (DCPC)** e o **Empacotamento Máximo de Caminhos Arco-Íris (MRPP)**. Por meio de reduções polinomiais a partir do Problema do Caminho Hamiltoniano, demonstrou-se que **ambos os problemas são NP-difíceis**. Essa descoberta ressalta a complexidade intrínseca dessas formulações e foi possível graças a uma fase de revisão bibliográfica e capacitação em Algoritmos de Aproximação e Complexidade Computacional.

Próximos Passos

Com a NP-dificuldade geral confirmada, a pesquisa avançará para diversas frentes. Pretendemos investigar a complexidade desses problemas em **instâncias específicas de grafos**, onde soluções em tempo polinomial podem ser viáveis. Além disso, buscaremos compreender o **impacto do número de cores** na dificuldade do problema. Finalmente, um objetivo central será o **desenvolvimento de algoritmos de aproximação** para cenários onde a busca por soluções ótimas é inviável.

Referências Bibliográficas

[1] FERNANDES, Cristina G. *et al*. 23° Colóquio Brasileiro de Matemática: **Uma Introdução Sucinta a Algoritmos de Aproximação**. IMPA, 2001.

[2] WILLIAMSON, David P.; SHMOYS, David B. **The Design of Approximation Algorithms**. 1. ed. [*S. l.*]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 978-0521195270.

[3] CORMEN, Thomas H. *et al*. **Introduction to Algorithms**. 3. ed. [S. l.]: MIT Press, 2009. ISBN 978-0262033848.

[4] WEST, Douglas B. **Introduction to Graph Theory**. 2 ed. United States: Pearson, 2000.

[5] KARP, Richard M. **Reducibility Among Combinatorial Problems**. In: *Complexity of Computer Computations*. Plenum Press, 1972. p. 85-103.