XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

O balde de Newton quântico: Rotações ativa e passiva na teoria quântica

Palavras-chave: Rotações ativa e passiva, Balde de Newton, Teoria quântica

Autores:
Augusto Facundes da Silva, IFGW - Unicamp
Kayman Jhosef Gonçalves, IFGW - Unicamp
Prof. Dr. Giorgio Torrieri (orientador), IFGW - Unicamp

1 Introdução

A distinção entre rotações ativa e passiva é um tema central em física, com implicações profundas tanto na mecânica clássica quanto na teoria quântica. O ponto de partida para essa discussão remonta ao experimento mental do balde de Newton, no qual a rotação de um balde com água leva à formação de uma superfície curva no líquido, independentemente da rotação do observador. Esse efeito sugere que certos fenômenos físicos relacionados à rotação são absolutos e não puramente relativos, desafiando a visão clássica da relatividade do movimento.

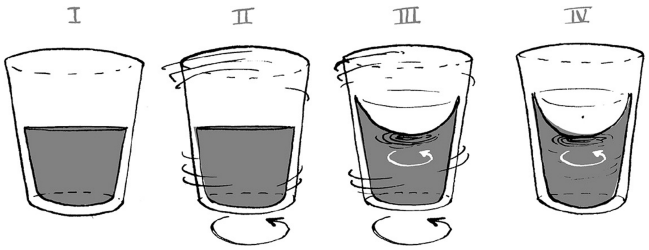

Figura 1: Esquema do experimento mental do balde de Newton. Fonte: adaptado de [1].

Este dilema foi revisitado recentemente pela observação experimental de efeitos vorticosos no plasma de quarks e glúons (QGP) [2, 3], o que tem gerado maior interesse no contexto da cromodinâmica quântica (QCD) em referenciais rotativos [4, 5]. Porém, o cálculo de grandezas associadas têm sido, geralmente, dados por rotações através de uma métrica colocada "à mão", o que corresponde a uma rotação passiva.

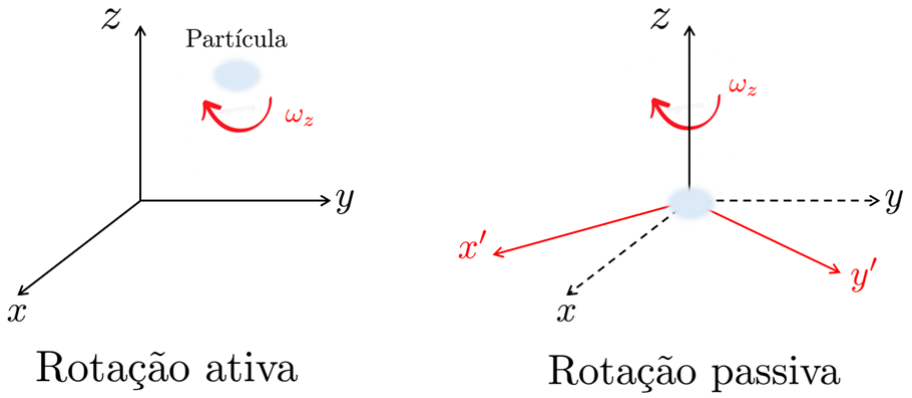

Figura 2: Diferença esquemática entre uma rotação ativa e uma rotação passiva. Fonte: autores.

Naturalmente, em laboratório, os sistemas giram porque há algo em sua dinâmica que os faz girar (uma rotação ativa). Assim, surge a questão de a que medida essas duas descrições são equivalentes, sendo este o ponto principal a ser estudado e discutido por este trabalho.

2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer critérios sob os quais rotações ativas e passivas em sistemas quânticos são fisicamente equivalentes. Isso é feito analisando diferentes potenciais conhecidos da mecânica quântica e suas simetrias, com possíveis aplicações à fenomenologia de altas energias, a teorias de campos quânticos e gravidade quântica.

3 Rotações ativa e passiva em sistemas quânticos

3.1 Definições gerais

- **Rotação ativa:** a rotação é causada por um potencial do sistema, ou seja, a partir de um termo adicional à Hamiltoniana estacionária $H \to H + H_{\text{rotação}}$;
- **Rotação passiva:** o sistema é estacionário e o detector rotaciona, o que equivale a aplicar uma matriz de rotação $\mathcal{D}(t)$ à matriz de densidade $\rho \to \mathcal{D}^\dagger(t)\rho\mathcal{D}(t)$.

3.2 Evolução temporal do operador de densidade

A partir da equação de Heisenberg em unidades naturais ($c = \hbar = 1$), a dinâmica do operador de densidade $\hat{\rho}(t)$ é dada por

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = i[\hat{\rho}, \hat{H}] \implies \hat{\rho}(t) = \mathcal{A}^\dagger(t)\hat{\rho}(0)\mathcal{A}(t), \tag{1}$$

onde $\mathcal{A}(t)$ é o operador responsável pela rotação ativa ou passiva, a depender do tipo de rotação. Considerando no instante $t = 0$

$$\hat{\rho}(0) = \rho_{m_1,m_2}|r\rangle\langle r'| \otimes |S\rangle\langle S'| \implies \hat{\rho}(0) = \sum_{m_1,m_2} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2}|M_1\rangle\langle M_2|, \tag{2}$$

com $C^{\cdots}_{\cdots}$ sendo os coeficientes de Clebsch-Gordan que acoplam os estados M_1 e M_2

Então, a dinâmica do operador de densidade é dada por

$$\hat{\rho}(t) = \mathcal{A}^{\dagger}(t) \left(\sum_{m_1,m_2} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} |M_1\rangle\langle M_2| \right) \mathcal{A}(t), \tag{3}$$

que depende explicitamente da forma que a rotação ocorre, dada pelo operador $\mathcal{A}(t)$.

3.2.1 Rotação passiva

A rotação passiva não depende do potencial presente no sistema, já que corresponde a uma rotação do referencial do detector. Assim, considerando um rotação em torno do eixo z, $\mathcal{A}(t) = \mathcal{D}_z(t) = e^{-i\hat{J}_z\omega t}$, onde ω é a velocidade angular de rotação e $\hat{J}_z$ é o operador de momento angular na direção z. Introduzindo $\mathcal{D}_z(t)$ na equação 3,

$$\hat{\rho}(t) = e^{i\hat{J}_z\omega_z t} \left(\sum_{m_\ell,m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} |M_1\rangle\langle M_2| \right) e^{-i\hat{J}_z\omega_z t} \tag{4}$$

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m_\ell,m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} e^{i(J_{z,M_1}\omega_{z_1} - J_{z,M_2}\omega_{z_2})t}. \tag{5}$$

Considerando que $\omega_{z_1} = \omega_{z_2} = \omega_z$, a dinâmica do operador de densidade para uma rotação passiva é dada por

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m_\ell,m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} e^{i(M_1-M_2)\omega_z t}. \tag{6}$$

3.2.2 Rotação ativa

Seguindo o que foi deduzido em 3, para uma rotação ativa, $\mathcal{A}(t)$ corresponde ao operador de evolução temporal do sistema, ou seja, $\mathcal{A}(t) = U(t) = e^{-i\hat{H}t}$, onde $\hat{H}$ é a sua Hamiltoniana. Sendo assim,

$$\hat{\rho}(t) = e^{i\hat{H}t} \left(\sum_{m_\ell,m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} |M_1\rangle\langle M_2| \right) e^{-i\hat{H}t} \tag{7}$$

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m_\ell,m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} e^{i(H_{M_1}-H_{M_2})t}. \tag{8}$$

Dessa forma, como já mencionado, para um rotação ativa, $\hat{\rho}$ depende diretamente do potencial que o sistema está presente. Assim, alguns potenciais conhecidos foram estudados:

- **Potencial coulômbico em coordenadas esféricas:**

A Hamiltoniana deste sistema é dada por $\hat{H} = \dfrac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \dfrac{\alpha}{r} - \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{J}}$, com a rotação do sistema dada pelo termo $\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{J}}$, cujos autovalores são $H_{M_i} = -\dfrac{\alpha m}{2\hbar^2 n^2} - \hbar\omega_i M_i$. Subsituindo em 8,

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m_\ell,m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} e^{i(M_2-M_1)\omega_z t}, \tag{9}$$

que é análoga à equação 6, indicando a equivalência de ambas as rotações para este sistema, pois os estados têm dinâmicas...

• **Potencial magnético dependente da posição em 2 dimensões:**

Supondo um campo magnético que varia com a posição na forma $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \left(\Omega_1 + \frac{\Omega_2}{r} + \frac{\Omega_3}{r^2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$, com uma Hamiltoniana da forma $\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} - \boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\boldsymbol{J}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$, o sistema tem autovalores de energia que satisfazem o método de Nikiforov-Uvarov [6]. Dessa forma, o operador de densidade tem a forma

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m_\ell, m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} \exp\left\{ i\left[2m\left(\frac{\alpha + \gamma\frac{q}{2m}M_1\Omega_2}{1+2n+\sqrt{1-4(\gamma q M_1\Omega_3 - \ell(\ell+1))}}\right)^2 - 2m\left(\frac{\alpha + \gamma\frac{q}{2m}M_2\Omega_2}{1+2n+\sqrt{1-4(\gamma q M_2\Omega_3 - \ell(\ell+1))}}\right)^2 + (M_2 - M_1)\left(\omega_z + \gamma\frac{q}{2m}\Omega_1\right)\right] t\right\}, \quad (10)$$

que é diferente de 6, indicando que, para este sistema físico, os referenciais sob a perspectiva de uma rotação ativa e de uma passiva **não são equivalentes**.

• **Poço cilíndrico:**

Considerando um poço cilíndrico de raio R e profundidade constante U_0, a Hamiltoniana do sistema é $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - U_0 - \boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\mathbf{J}}$, cujos autovalores são [7]

$$E_{Mnk_z} = -\frac{1}{2mR^2}y_{Mn}^2 - \frac{M\lambda}{R} + \frac{k_z^2}{2m} \quad , \quad E_{Mak_z} = \frac{1}{2m}\left(\omega^2 x_{Ma}^2 + k_z^2\right) - U_0 - M\omega \quad (11)$$

para uma rotação lenta ($R < 1/\omega$) e rápida ($R > 1/\omega$), respectivamente, onde k_z é o número de onda, $\lambda = R\omega$, y_{Mn}, $n = 1, 2, ...$ é o conjunto de soluções que satisfazem as condições de contorno e x_{Ma}, $a = 1, 2, ...$ é o conjunto de zeros da M-ésima função de Bessel [7]. Para ambos os regimes, respectivamente,

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m_\ell, m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} \exp\left[i\frac{1}{2mR^2}\left(y_{M_2n}^2 - y_{M_1n}^2\right) t\right] \exp\left[i\left(M_2 - M_1\right)\omega t\right]. \quad (12)$$

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m_\ell, m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} \exp\left[i\frac{1}{2m}\left(x_{M_1a}^2 - x_{M_2a}^2\right) t\right] \exp\left[i\left(M_2 - M_1\right)\omega t\right], \quad (13)$$

o que, novamente, indicam casos em que as rotações ativa e passiva **não são equivalentes**.

• **Potencial coulômbico em um poço cilíndrico:**

Revisitando o potencial coulômbico, mas, agora, em uma simetria cilíndrica, como descrita pelo poço anterior [7], a condição de quantização implica em um número quântico natural que depende de M na forma $|M| \leq n' - 1$, tal que $n = n' - 1/2$. Com esta condição, há uma diferença considerável na diferença das Hamiltonianas H_{M_1} e H_{M_2} na equação 8, resultando em um operador de densidade da forma

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m_\ell, m_s} C^{J,M_1}_{s,m_\ell,\ell,m_1} C^{J,M_2}_{s,m_\ell,\ell,m_2} \rho_{m_1,m_2} \times \exp\left\{ i\alpha\left[\frac{1}{\left[n_2'(\omega) - 1/2\right]^2} - \frac{1}{\left[n_1'(\omega) - 1/2\right]^2}\right] t\right\} \exp\left[i\left(M_2 - M_1\right)\omega t\right], \quad (14)$$

o que mostra a **não-equivalência das rotações**, um resultado surpreendente, considerando que o potencial coulômbico em coordenadas esféricas resultou no oposto. Ou seja, aqui há uma indicação do forte papel da simetria do sistema físico.

3.3 Simetrias: lições aprendidas

Tanto o potencial magnético, quanto o poço cilíndrico, que são os demais sistemas cujas rotações não são equivalentes, também possuem simetrias cilíndricas. A distinção entre rotações ativas e passivas revela uma diferença importante entre a física clássica e a quântica. Na mecânica clássica, simetrias esféricas e cilíndricas costumam ser equivalentes quando se trata de rotações ao redor de um eixo (como o eixo z), pois não há incertezas ligadas aos operadores de simetria.

Já na mecânica quântica, a situação muda porque os operadores associados a rotações não necessariamente comutam entre si, e isso afeta a estrutura dos estados. Por exemplo, simetrias esféricas são associadas a harmônicos esféricos, enquanto simetrias cilíndricas envolvem funções de Bessel. Além disso, os grupos de simetria envolvidos ($SO(3)$ para o caso esférico e $SO(2)\times T_1$ para o cilíndrico) têm geradores diferentes, o que implica comportamentos distintos.

Como resultado, em uma rotação passiva (quando o observador gira), certos padrões de simetria permanecem válidos. Mas em uma rotação ativa (quando o sistema gira por influência de um potencial), isso só ocorre se o potencial respeitar todas as simetrias do grupo de rotação. Caso contrário, a equivalência entre rotação ativa e passiva se rompe. No caso do balde de Newton (no limite clássico), a Hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{I\dot{\phi}_B}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + V_{\text{contato}} + V_{\text{água}} + V_{\text{grav}}, \tag{15}$$

em que os termos relacionados ao contato e o gravitacional não comutam com J_z. Então, por tais argumentos, não é esperado que as rotações ativa e passiva deste sistema sejam equivalentes, o que é, de fato, mostrado pelo experimento.

Referências

[1] M. Janssen, (2008).

[2] Q. Wang, Nucl. Phys. A **967**, 225 (2017), arXiv:1704.04022 [nucl-th] .

[3] T. Niida and S. A. Voloshin, Int. J. Mod. Phys. E **33**, 2430010 (2024), arXiv:2404.11042 [nucl-ex] .

[4] V. V. Braguta, I. E. Kudrov, A. A. Roenko, D. A. Sychev, and M. N. Chernodub, JETP Lett. **117**, 639 (2023).

[5] M. N. Chernodub, Phys. Rev. D **103**, 054027 (2021), arXiv:2012.04924 [hep-ph] .

[6] P. H. De Moura, K. J. Gonçalves, and G. Torrieri, Phys. Rev. D **108**, 034032 (2023), arXiv:2305.02985 [hep-ph] .

[7] M. Buzzegoli and K. Tuchin, Nuclear Physics A **1030**, 122577 (2023), arXiv:2209.03991 [nucl-th] .