XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

O FORMALISMO DE PACOTE DE ONDA NO ESTUDO DO TUNELAMENTO E TEMPO DE ATRASO EM MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA

PALAVRAS-CHAVE: mecânica quântica, pacote de onda, tunelamento.

Autores/as:
Ellen Carolina Guimarães, IFGW - UNICAMP
Prof. Dr. Stefano de Leo, IMECC - UNICAMP

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo descrever e analisar processos de espalhamento em mecânica quântica não-relativística a partir do formalismo de pacote de onda, explorando a propagação e a dispersão espacial do feixe em diferentes regimes — com foco em dois fenômenos centrais: o tunelamento quântico e o tempo de atraso.

Na Seção "**Equação de Schrödinger**", revisita-se o formalismo aplicado a partículas livres, destacando a separabilidade da função de onda e estabelecendo a base analítica para a construção dos pacotes.

Na Seção "**Integral Gaussiana de Momentum para Partícula Livre**", desenvolve-se a função de onda por meio de integrais gaussianas, obtendo-se expressões que descrevem sua evolução transversal. As Figuras **1–3** ilustram o alargamento espacial e temporal dos pacotes, evidenciando a relação entre o parâmetro A, a distribuição de momento e a penetração em barreiras de potencial.

Na Seção "**Múltiplos Potenciais**", estuda-se a transmissão em sistemas com n barreiras (Figuras **4–7**), discutindo-se as interferências decorrentes da superposição coerente das amplitudes, bem como o papel das fases acumuladas e trajetórias internas na definição do tempo de Wigner.

EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A Equação de Schrödinger (1926) marcou a transição da física clássica - que não conseguia lidar com fenômenos como o efeito fotoelétrico (Einstein, 1905) e a dualidade onda-partícula (De Broglie, 1924) - para a física quântica. Inspirado por De Broglie, Schrödinger buscou por uma equação diferencial que descrevesse a evolução temporal da função de onda $\Psi(r,t)$:

$$i\hbar \cdot \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\cdot\Psi(\vec{r},t);$$

ou seja, sob análise de energia para mecânica clássica,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r},t), \tag{1}$$

Schrödinger estabeleceu:

$$E \to i\hbar \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{e} \quad p \to -i\hbar\nabla.$$

Para resolver essa equação, assume-se **separabilidade** da solução em duas partes, uma dependente do espaço e outra do tempo:

$$\Psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r})\cdot\chi(t); \tag{2}$$

em que $\vec{r} \in \text{span}\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$. Substituindo e desenvolvendo os termos, obtém-se:

$$^{1}i\hbar \cdot \frac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\nabla^2\varphi(\vec{r})}{\varphi(\vec{r})} + V(\vec{r}_{x,y,z})^{2}.$$

Organizada de forma que o lado esquerdo dependa apenas de t e o lado direito apenas de $\vec{r}$, isso implica, por se tratar de uma igualdade, que ambos os lados equivalem à uma constante C. De modo que ao desenvolver o lado esquerdo,

$$^{1}\chi(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \implies \chi(t) = e^{-i\frac{p^2}{2m}\frac{t}{\hbar}}.$$

Já em análise de **Partícula Livre**, ou seja, para $V(\vec{r}) = 0$, ao desenvolver o lado direito,

$$^{2}\varphi(\vec{r}) = e^{-\frac{ip\vec{r}}{\hbar}} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = e^{i\left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\hbar}\right)}.$$

Deste modo, a Equação 1 para Partícula Livre é:

$$E = \frac{p^2}{2m}\text{, com } p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2;$$

admitindo que a partícula segue no eixo z, fixa-se p_x e p_y em função de p_z:

$$p_z = \sqrt{p^2 + p_x^2 + p_y^2}\text{, em que } \vec{p} = \sqrt{2m\cdot[E - V(\vec{r},t)]},$$

onde $\vec{p}$ é o momento linear da partícula, m sua massa, E a energia total do sistema e V o potencial dependente da posição e do tempo.

Portanto, substituindo na Equação 2, dada a separabilidade da solução,

$$\Psi(\vec{r},t) = e^{i\left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\hbar} - \frac{p^2}{2m}\cdot\frac{t}{\hbar}\right)}. \tag{3}$$

INTEGRAL GAUSSIANA DE MOMENTUM PARA PARTÍCULA LIVRE

O **Momento da Partícula** no plano $[x, y]$, com propagação ao longo de z, fixado em $p = p_0$, é descrito pela seguinte integral, considerando as exponenciais obtidas pela separabilidade:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dp\, dp_x\, dp_y \underbrace{e^{\frac{-(px^2+py^2)w^2}{4\hbar}}}_{\text{Distribuição Gaussiana}} \cdot \underbrace{e^{i\frac{(p_x x + p_y y + p_z z)}{\hbar}} \cdot e^{-i\frac{p_0^2}{2m}\frac{t}{\hbar}}}_{\text{Onda Plana}}} \tag{4}$$

Ao tornar p_z analítico, desenvolvendo-o em série,

$$pz = \sqrt{p_0^2 + px^2 + py^2} \Rightarrow pz = p_0 - \frac{px^2 + py^2}{2p_0};$$

Remove-se da equação todos os termos que independem de p_x e p_y,

$$e^{i\left(p_0 z - \frac{p_0^2 t}{2m}\right)} \cdot A(x,z) \cdot A(y,z),$$

$$|\ A(x|y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dpx|dpy\, e^{-\frac{(px|py)^2 w^2}{4\hbar}} \cdot e^{i\left[(p_x x|p_y y) - \frac{(px|py)^2 z}{2p_0\hbar}\right]}.$$

O fenômeno físico em análise é a **incidência de N ondas planas livres**,

$$I_{(x,y,z)} = N \cdot |A(x,z)|^2 \cdot |A(y,z)|^2;$$

no qual N representa a constante de normalização associada aos termos independentes de x e y. Essa constante é determinada impondo a condição de normalização,

$$N^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |A(x,z)|^2 \cdot |A(y,z)|^2 = 1.$$

Intui-se descobrir N, usando unidades naturais $\hbar = 1$. Ao reagrupar os termos para $A(x|y,z)$,

$$A(x|y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dpx|dpy\, e^{-\left(\frac{w^2}{4} + \frac{iz}{2p_0}\right)(px|py)^2 + i(p_x x|p_y y)}.$$

Vê-se que a integral acima se assemelha à:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-au^2+bu} = e^{\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}};$$

estabelece-se que $a = \frac{w^2}{4} + \frac{iz}{2p_0}$ e $b = i(x|y)$,

$$A(x|y,z) = \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{w^2}{4} + \frac{iz}{2p_0}\right)}} \cdot e^{\frac{-(x|y)^2}{\left(w^2 + \frac{2iz}{p_0}\right)}}.$$

Para a análise do quadrado do módulo valores numéricos não interessam, por isso:

$$A(x|y,z) \propto \frac{e^{\frac{-(x|y)^2}{\left(w^2 + \frac{2iz}{p_0}\right)}}}{\sqrt{\left(\frac{w^2}{4} + \frac{iz}{2p_0}\right)}}.$$

Multiplicando o numerador e denominador por seu respectivo complexo conjugado, obtêm-se:

$$|A(x|y,z)|^2 \propto \left| \frac{e^{\frac{-2(x|y)^2}{w^4 + \left(\frac{2z}{p_0}\right)^2}}}{w^4 + \left(\frac{2z}{p_0}\right)^2} \right|^2,$$

$$|A(x|y,z)|^2 \propto \frac{e^{-\frac{2(x|y)^2}{\theta(z)}}}{\theta(z)}, \text{ em que } \theta(z) = w^4 + \left(\frac{2z}{p_0}\right)^2.$$

Então, resolve-se $\int |A(x,z)|^2 \cdot |A(y,z)|^2 = \frac{1}{N}$,

$$\frac{1}{N} = \int\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{\theta(z)}}}{\theta(z)}}_{|A(x,z)|^2 \cdot |A(y,z)|^2} dxdy,$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\theta(z)} \int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{\theta(z)}} dxdy,$$

sabendo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{\theta(z)}} dx = \sqrt{\frac{\pi\theta(z)}{2}}.$$

Deste modo, determina-se que a normalização N é:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\theta(z)} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi\theta(z)}{2}}\right)^2 \Rightarrow N = \frac{2}{\pi}.$$

Portanto, o índice de **incidência de N ondas planas livres** é dado da seguinte forma:

$$I_{(x,y,z)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{w^4 + \left(\frac{2z}{p_0}\right)^2}}}{w^4 + \left(\frac{2z}{p_0}\right)^2}. \tag{5}$$

As Figuras 1 e 2 a seguir representam graficamente a função analítica $f[x_-, z_-, A_-]$ abaixo - desenvolvidas no ***Wolfram Mathematica*** -, com o objetivo de analisar seu comportamento em diferentes regimes dos parâmetros empregados z e A.

Normalizando, em $A(x,z)$, o denominador do exponencial por w^4 e admitindo $A = p_0 w^4$, tem-se:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{2x^2}{1+\left(\frac{2z}{p_0 w^4}\right)^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{p_0 w^4}\right)^2}} \Rightarrow f[x_-, z_-, A_-] := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-2\frac{x^2}{1+\left(2\frac{z}{A}\right)^2}}}{\sqrt{1 + \left(2\frac{z}{A}\right)^2}},$$

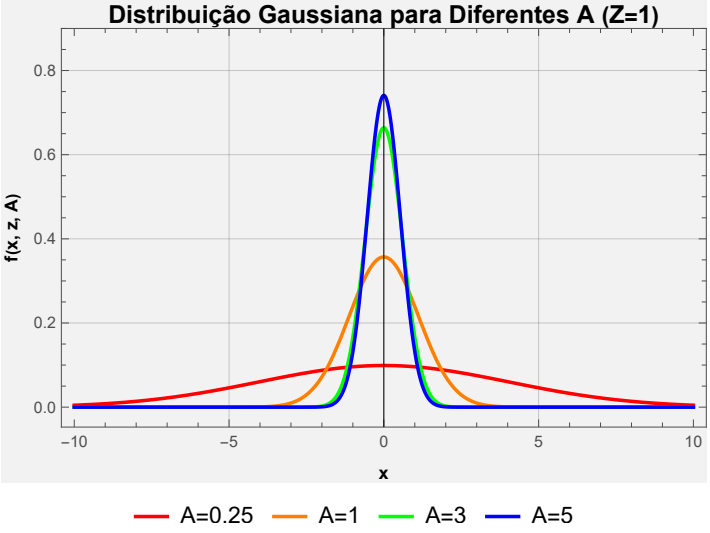

Figura 1: Representação de secções verticais da gaussiana para $A(x, z)$, com Z constante - fonte: Elaboração própria.

Na Figura 1, observa-se que, com z fixo, o aumento de A - associado à largura inicial do feixe (w) - gera distribuições mais largas, enquanto menores valores resultam em feixes mais estreitos, refletindo o comportamento difrativo típico da propagação em meios lineares.

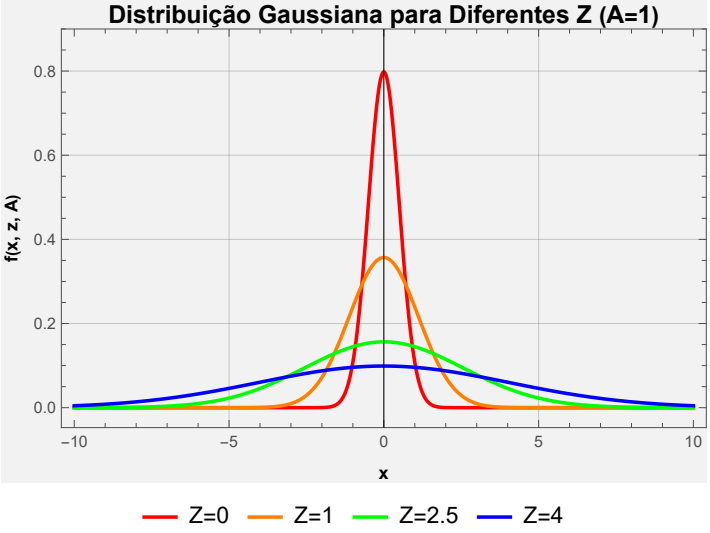

Figura 2: Representação de secções verticais da gaussiana para $A(x, z)$, com A constante - fonte: Elaboração própria.

Na Figura 2, com A fixo, observa-se que o aumento de z provoca o alargamento da distribuição, indicando perda de colimação do feixe ao longo da propagação - comportamento esperado em propagações de ondas gaussianas não confinados.

É possível observar que para $A = 1$, na Figura 1, e $Z = 1$, na Figura 2, os comportamentos da função $f(x, z, A)$ são idênticos, uma vez que correspondem à mesma razão em $f[x_-, z_-, A_-]$. O mesmo ocorre para $A = 0.25$, na Figura 1, e $Z = 4$, na Figura 2.

Dividindo, em $A(y, z)$, o numerador e denominador do exponencial por w^4, admitindo $\gamma = \frac{x}{w}$ e $T = \frac{z}{w^2 p_0}$, tem-se:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{-2\frac{y^2}{w^4}}{1+\left(\frac{2z}{w^4 p_0}\right)^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{2z}{w^4 p_0}\right)^2}} \Rightarrow r[\gamma_-, T_-] = \frac{e^{\frac{-2\gamma}{1+4T^2}}}{\sqrt{1+4T^2}},$$

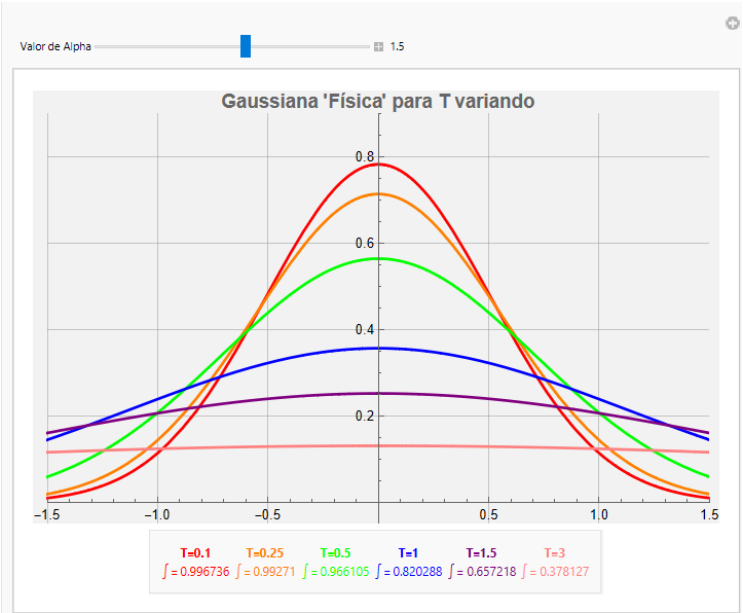

Figura 3: Representação física da gaussiana de $A(y, z)$, para T variante e $\alpha \mapsto seq(0.25 : 0.25 : 2.5)$ - fonte: Elaboração própria.

A Figura 3 apresenta a evolução da largura transversal da distribuição em função do parâmetro T, determinado pelo fator $\alpha\sqrt{1+4T^2}$, em que $\alpha = 1.5$ determina o *range* em x.

Na representação da Figura 3, a largura inicial do feixe é expressa em ***unidades naturais***, com $w = \frac{1}{10^3\,\mathrm{eV}}$. Considerando que $1\,\mathrm{eV}^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-7}$ m, obtemos $w \approx 0{,}2$ nm em unidades de comprimento.

A largura em nanômetros é típica de sistemas quânticos com tunelamento, enquanto em experimentos com feixes reais - como elétrons ou lasers - são mais adequados valores em centímetros.

As figuras ilustram a propagação de pacotes de onda gaussianos, observa-se que feixes mais estreitos de maior valor para A, Figura 1, correspondem a distribuições mais amplas em p, permitindo maior interação em barreiras de potencial, o que aumenta a chance de tunelamento. Já a dispersão ao longo de z, Figura 1, e de T, Figura 3, evidencia o alargamento temporal do pacote, o que afeta a determinação do tempo de atraso.

Esses efeitos tornam-se ainda mais complexos em sistemas com múltiplas barreiras de potencial, onde as diversas reflexões internas e as fases acumuladas em cada região resultam em padrões de interferência que variam com os parâmetros do sistema. Essas interferências influenciam não apenas as probabilidades de transmissão e reflexão, mas também modificam o tempo de atraso. O acoplamento entre barreiras dá origem a ressonâncias e regiões de transparência parcial, mostrando a natureza não local do tunelamento quântico e demonstrando como as condições de contorno influenciam na dinâmica do espalhamento.

MÚLTIPLOS POTENCIAIS

Considere a configuração de V_n potenciais separados por barreiras localizadas em $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$, com distâncias sucessivas dadas por $d_n = Z_n - Z_{n-1}$, do seguinte modo:

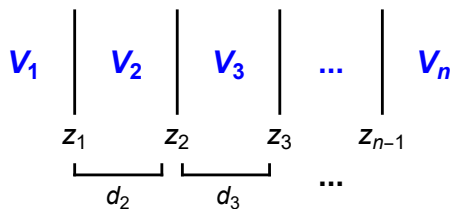

Figura 4: Representação para V_n potenciais - fonte: Elaboração própria.

Para análise de ***dois potenciais***, vê-se que incidem ondas planas livres na barreira Z_1 sob um potencial V_n, definido por:

$$V_n = \begin{cases} V_1, & \text{se } x \leq Z_1, \\ V_2, & \text{se } x > Z_1. \end{cases}$$

Representa-se a reflexão (R_{12}) e a transmissão (T_{12}):

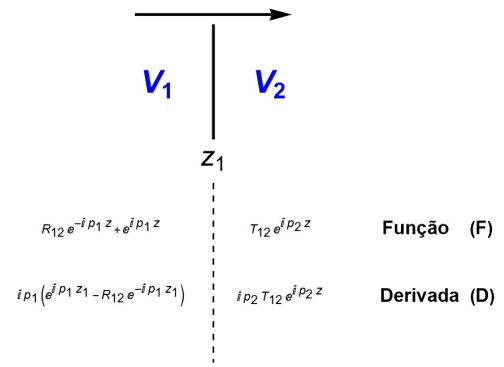

Figura 5: Degrau de potencial com as equações de continuidade (F) e a suas respectivas derivadas (D) - fonte: Elaboração própria.

Ao aplicar as equações de continuidade, em z_1, às condições de contorno, e realizar $F\,|D\,\cdot e^{-ip_1z_1}$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} 1 + R_{12} \cdot e^{-2ip_1z_1} &= T_{12} \cdot e^{i(p_2-p_1)z_1}, \\ 1 - R_{12} \cdot e^{-2ip_1z_1} &= \frac{p_2}{p_1} \cdot T_{12} \cdot e^{i(p_2-p_1)z_1}, \end{aligned}$$

somando-as, obtêm-se:

$$T_{12} = t_{12} \cdot e^{i(p_1-p_2)z_1}, \text{ em que } t_{12} = \frac{2p_1}{p_1+p_2}.$$

Substituindo T_{12} em qualquer uma das equações supracitadas e isolando o termo de interesse,

$$R_{12} = r_{12} \cdot e^{2ip_1z_1}, \text{ em que } r_{12} = \frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}.$$

Considere, então, a propagação no sentido inverso, ou seja, $V_1 \leftarrow V_2$. Nesse regime, admite-se $p_2 \to -p_1$ e, consequentemente, $p_1 \to -p_2$, gerando os coeficientes de reflexão e transmissão retrógrados, $\widetilde{R}_{21}$ e $\widetilde{T}_{21}$ (seguindo o desenvolvimento sobredito):

$$\widetilde{T}_{21} = \widetilde{t}_{21} \cdot e^{i(p_1-p_2)z_1}, \text{ em que } \widetilde{t}_{21} = \frac{2p_2}{p_2+p_1}.$$

$$\widetilde{R}_{21} = \widetilde{r}_{21} \cdot e^{-2ip_2z_1}, \text{ em que } \widetilde{r}_{21} = \frac{p_2-p_1}{p_2+p_1}.$$

Para análise de ***três potenciais***, vê-se que incidem ondas planas livres sobre três regiões com potenciais distintos, separadas por barreiras Z_1 e Z_2. O potencial V_n é dado por:

$$V_n = \begin{cases} V_1, & \text{se } x \leq Z_1, \\ V_2, & \text{se } Z_1 < x \leq Z_2, \\ V_3, & \text{se } x > Z_2. \end{cases}$$

Retrata-se a reflexão (R_{123}) e a transmissão (T_{123}):

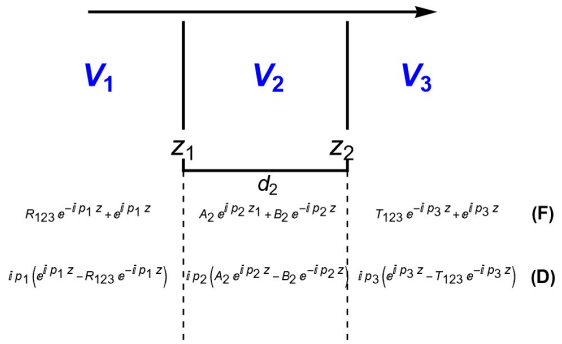

Figura 6: Barreira de potencial com as equações de continuidade (F) e a suas respectivas derivadas (D) - fonte: Elaboração própria.

Ao aplicar as equações de continuidade, em z_1 e z_2, às condições de contorno,

$$\begin{aligned} e^{ip_1z_1} + R_{123} \cdot e^{-ip_1z_1} &= A_2 \cdot e^{ip_2z_1} + B_2 \cdot e^{-ip_2z_1}, \\ e^{ip_1z_1} - R_{123} \cdot e^{-ip_1z_1} &= \frac{p_2}{p_1}\left(A_2 \cdot e^{ip_2z_1} - B_2 \cdot e^{-ip_2z_1}\right), \\ A_2 \cdot e^{ip_2z_2} + B_2 \cdot e^{-ip_2z_2} &= T_{123} \cdot e^{ip_3z_3}, \\ A_2 \cdot e^{ip_2z_2} - B_2 \cdot e^{-ip_2z_2} &= \frac{p_3}{p_2}\left(T_{123} \cdot e^{ip_3z_2}\right), \end{aligned}$$

em que A_2 e B_2 são coeficientes arbitrários reais entre as barreiras z_1 e z_2.

Expressando-as na **forma matricial**, para $V_1 \to V_2$,

$$\begin{pmatrix} e^{ip_1z_1} \\ R_{123} \cdot -e^{-ip_1z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{p_2}{p_1} & -\frac{p_2}{p_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 \cdot e^{ip_2z_1} \\ B_2 \cdot e^{-ip_2z_1} \end{pmatrix},$$

já para $V_2 \to V_3$,

$$\begin{pmatrix} e^{ip_2z_2} & 0 \\ 0 & -e^{-ip_2z_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_3}{p_2} \end{pmatrix} \cdot T_{123} \cdot e^{ip_3z_2}.$$

Isola-se A_2 e B_2 a partir da transição $V_2 \to V_3$. Em seguida, resolve-se a equação de $V_1 \to V_2$, a fim de isolar a matriz associada a R_{123}. Por fim, substituem-se as expressões de A_2 e B_2, resultando:

$$\begin{pmatrix} e^{ip_1z_1} \\ R_{123} \cdot e^{-ip_1z_1} \end{pmatrix} = \frac{T_{123} \cdot e^{ip_3z_2}}{t_{12}t_{23}} \cdot \begin{pmatrix} e^{-ip_2d_2} & r_{12} \cdot r_{23} \\ r_{12} & r_{23} \cdot e^{ip_2d_2} \end{pmatrix}$$

Os efeitos de difusão e acoplamento - tais quais transmissões e fases acumuladas - estão incorporados no lado direito da forma matricial. Esse método permite a generalização para múltiplos potenciais, em que cada nova barreira adiciona coeficientes locais (r_{ij}, t_{ij}) e fases ($e^{ip_nd_n}$). Com isso, tem-se:

$$T_{123} = \frac{t_{12}t_{23}}{1 + r_{12}r_{23}} \cdot e^{i(p_1z_1+p_2d_2-p_3z_2)}$$

$$R_{123} = \frac{r_{12} + r_{23} \cdot e^{2ip_2d_2}}{1 + r_{12}r_{23} \cdot e^{2ip_2d_2}} \cdot e^{2ip_1z_1}$$

Para análise pelas ***múltiplas reflexões***, considera-se a incidência de N ondas planas livres, $I(x,t)$, conforme a figura abaixo:

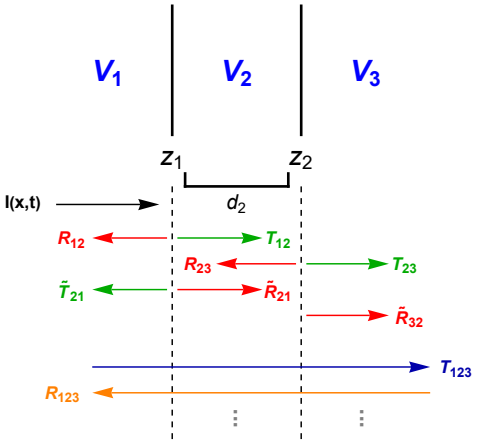

Figura 7: Barreira de potencial sob análise de múltiplas reflexões - fonte: Elaboração própria.

Para esta análise, a transmissão pode ser modeladas pela seguinte **série geométrica**:

$$G_\infty = a\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

em que $a = T_{12}T_{23}$, $r = \widetilde{R}_{21}R_{23}$.

Para a nossa análise, $r^n = (\widetilde{R}_{21}R_{23})^n \approx 0$, ou seja:

$$T_{123} = \frac{T_{12}T_{23}}{1-\widetilde{R}_{21}R_{23}}.$$

No caso de dois potenciais, as quantidades T_{12} e $\widetilde{R}_{21}$ foram essenciais para compor T_{123}. Seguindo a mesma estrutura, observamos que T_{23} e R_{23} admitem expressões análogas:

$$\begin{aligned} T_{23} &= t_{23}\cdot e^{i(p_2-p_3)z_2}, \text{ em que } t_{23} = \frac{2p_2}{p_2+p_3}. \\ R_{23} &= r_{23}\cdot e^{2ip_2z_2}, \text{ em que } r_{23} = \frac{p_2-p_3}{p_2+p_3}. \end{aligned}$$

Desta forma, ao desenvolver os termos obtêm-se,

$$T_{123} = \frac{t_{12}t_{23}}{1+r_{12}r_{23}}\cdot e^{i(p_1z_1+p_2d_2-p_3z_2)}.$$

Com isso, R_{123} pode ser descrito pela soma das múltiplas reflexões que ocorrem entre as barreiras Z_1 e Z_2,

$$R_{123} = R_{12} + T_{12}R_{23}\widetilde{T}_{21} + T_{12}R_{23}\widetilde{R}_{21}\widetilde{R}_{23}\widetilde{T}_{21} + \dots$$

no qual cada parte da soma representa um parâmetro específico, com $T_{12}R_{23}\widetilde{T}_{21} = a$ e com $\widetilde{R}_{21}\widetilde{R}_{23} = r$, ou seja, seguindo uma lógica semelhante à T_{123},

$$R_{123} = R_{12} + \frac{T_{12}R_{23}\widetilde{T}_{21}}{1-R_{23}\widetilde{R}_{21}}$$

Já se dispõe de R_{12} e $\widetilde{T}21$ do caso de dois potenciais, completando o necessário para construir $R123$. Desenvolvendo os termos, tem-se:

$$R_{123} = \frac{r_{12}+r_{23}\cdot e^{2ip_2d_2}}{1+r_{12}r_{23}\cdot e^{2ip_2d_2}}\cdot e^{2ip_1z_1}$$

No método de múltiplas reflexões, ao decompor a transmissão e a reflexão em termos de sucessivas contribuições parciais - cada uma associada a trajetórias específicas de ida e volta entre as descontinuidades -, torna-se possível identificar como interferências construtivas e destrutivas corroboram à probabilidade de tunelamento. Além disso, o método permite quantificar os atrasos de fase acumulados em cada região, os quais estão diretamente relacionados ao chamado tempo de Wigner (ou tempo de atraso), além de simplificar a resolução algebricamente. Vê-se que barreiras e degraus de potencial atuam como filtros, em que a superposição coerente das amplitudes demonstra como os pacotes de onda interagem com toda a estrutura mesmo antes de "passar" por ela.

CONCLUSÃO

Este trabalho explorou a dinâmica de pacotes de onda gaussianos em sistemas quânticos com barreiras de potencial, destacando a influência da dispersão espacial e temporal no tunelamento e no tempo de atraso. Através do formalismo de pacotes de onda, demonstrou-se que feixes mais estreitos em x (maior vlaor de A) apresentam distribuições mais amplas em $\vec{p}$, aumentando a probabilidade de penetração em barreiras, enquanto o alargamento ao longo da propagação (z ou T) introduz complexidade no tempo de atraso. A análise de sistemas com múltiplas barreiras revelou como interferências construtivas e destrutivas, decorrentes de reflexões internas e acúmulo de fases, modificam significativamente as taxas de transmissão. O método algébrico proposto, baseado em séries geométricas, mostrou-se mais conciso para descrever arranjos complexos, oferecendo material para simulações.

Os resultados obtidos demonstram que a combinação entre a dispersão espacial dos pacotes de onda e o acoplamento entre barreiras de potencial permite uma análise mais profunda dos mecanismos de tunelamento quântico e da dinâmica do tempo de atraso, oferecendo subsídios teóricos relevantes para a otimização de heteroestruturas quânticas e confecção de dispositivos baseados em interferência coerente.

BIBLIOGRAFIA

1. Bohm, A., Mostafazadeh, A., Koizumi, H., Niu, J., & Zwanziger, J. (2013). **The Geometric Phase in Quantum Systems: Foundations, Mathematical Concepts, and Applications in Molecular and Condensed Matter Physics**. Springer Science & Business Media.

2. Hauge, E. H., & Støvneng, J. A. (1989). **Tunneling times: a critical review**. Reviews of Modern Physics, 61(4), 917.

3. Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (2010). **Modern Quantum Mechanics** (2nd ed.). Cambridge University Press.

4. Tannor, D. J. (2007). **Introduction to Quantum Mechanics: A Time-Dependent Perspective**. University Science Books.

5. Tonomura, A. (1998). **Electron Diffraction**. Springer Science & Business Media.