MODELO MATEMÁTICO DE ESTUDOS DE CONTAMINAÇÃO DE SISTEMAS AQUÁTICOS

Palavras-Chave: MODELAGEM-MATEMÁTICA, RECURSOS-HIDRICO, RESOLUÇÃO-NUMÉRICA

Autores(as):
ANA CLARA JULIATO COUTINHO, FT – UNICAMP
Prof(ª). Dr(ª). ELAINE CRISTINA CATAPANI POLETTI, FT - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

A modelagem matemática representa uma importante ferramenta para a representação e análise de sistemas complexos, possibilitando a previsão de eventos e o desenvolvimento de estratégias satisfatórias em diversas áreas de estudo.

Para o estudo de águas subterrâneas, a modelagem matemática possibilita análises sobre propriedades como condutividade hidráulica, alterações e potenciais impactos decorrentes de intervenções, inclusive antrópicas, e acidentes ambientais, com previsão de eventos críticos, como contaminações e rebaixamentos do lençol freático, viabilizando simulações e possibilitando estudos e subsídio para medidas preventivas e mitigadoras.

A contaminação das águas subterrâneas representa uma preocupação significativa, além de se associar à diversas fontes, como vazamentos e falhas na infraestrutura de armazenamentos, atividades agrícolas, industriais e domésticas. No setor agrícola, tem-se o uso indiscriminado de agrotóxicos e fertilizantes, além do descarte inadequado de resíduos industriais e domésticos, o que também pode comprometer a qualidade desse recurso hídrico de forma significativa (Corseuil e Marins, 1997); (Ribeiro et al., 2007).

Mais da metade das cidades brasileiras dependem das águas subterrâneas para o abastecimento de água potável (Hirata et al., 2019a). Assim, faz-se necessária a adoção de uma abordagem de gestão baseada em estudos científicos. Existem diversas consequências da degradação de aquíferos, não só para a qualidade da água, mas também no desenvolvimento socioeconômicos de muitas regiões, podendo ocasionar em danos ambientais de grande escala. Nesse sentido, investigações voltadas ao comportamento da carga hidráulica e à condição qualitativa das águas subterrâneas tornam-se importantes para orientar estratégias de gestão e conservação desse recurso vital. É sob essa perspectiva que se desenvolve o presente estudo, voltado à análise de aquíferos por meio da aplicação de modelagem matemática, tanto em sua forma analítica quanto numérica. A abordagem adotada permite examinar aspectos relacionados a discussões sobre carga hidráulica e fatores ambientais que influenciam a qualidade e a disponibilidade do recurso, motivadas por simulações computacionais e geração de cenários hipotéticos de estudo.

METODOLOGIA:

Tendo como foco a conservação das águas subterrâneas e a modelagem matemática dos processos envolvidos, este estudo desenvolveu-se a partir da formulação de um modelo capaz de descrever a variação da carga hidráulica ao longo do tempo e do espaço em aquíferos confinados. Após a etapa de modelagem, buscou-se a obtenção de uma solução analítica da equação governante, bem como numérica para fins de comparação, implementação computacional e simulação de diferentes cenários.

Para tanto, estudos teóricos acerca das águas subterrâneas, bem como de modelamentos matemáticos foram necessários.

A resolução analítica da equação foi possível a partir de estudos sobre equações diferenciais parciais e a formulação de aproximação numérica, a partir de estudos sobre o Método de Diferenças Finitas.

Após implementação computacional em ambiente *Matlab* das soluções, simulações foram realizadas com valores de três importantes parâmetros próximos de valores de aquíferos reais: condutividade hidráulica K (dada em m/s), armazenamento específico S (adimensional) e a espessura do aquífero b (em metros).

Para a definição dos valores de simulação, fez-se necessário o entendimento de valores possíveis para cada propriedade no cenário de aquíferos confinados.

Após as simulações realizadas, foi possível a interpretação dos gráficos gerados por meio do modelo computacional, para definição de uma conjectura sobre a influência dos parâmetros.

MODELO MATEMÁTICO:

O modelo matemático que, estuda a taxa de variação da carga hidráulica h em função do tempo t em aquíferos confinados, é governado pela equação da difusão da carga hidráulica, também chamada de equação da água subterrânea, dado pela Equação (1):

$$S\frac{\partial h}{\partial t} = T\nabla^2 h \quad (1)$$

onde:

- $h(x,y,z,t)$ representa a carga hidráulica (altura piezométrica);
- S indica o armazenamento específico (sem unidade);
- T é transmissividade do aquífero (em m²/s);
- $\nabla^2 h$ é o operador Laplaciano em coordenadas espaciais;
- $t>0$ (em s) indica o tempo;
- $0<x<L$ (em m) o domínio espacial.

Considerando a formulação da equação para estudo da carga hidráulica propagada em aquífero confinado ao longo da direção x devido à difusão hidráulica, com S e T constantes, condições de contorno de Dirichlet homogêneas, e condição inicial $h(x,0)=\delta(x)$, $0<x<L$ $h(x,0)=\delta(x)$, $0<x<L$, a solução analítica do problema é dada pela Equação (2) (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020):

$$h(x,t) = \Sigma_{n=1}^{\{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{T}{S} t} \quad (2)$$

com: $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Os gráficos da solução analítica e numérica seguem apresentados na Figura 1, onde adotou-se para simulação, hipoteticamente, comprimento L=1 m, coeficiente de transmissividade do aquífero *T=0,001* m²/s, armazenamento específico *S=0,0001*, *Nx=100*, *Nt=500*, condição inicial: função Delta de Dirac *h*(*x,0*)=*f*(*x*)= *δ*(*x−x0*) e condições de contorno de Dirichlet homogêneas.

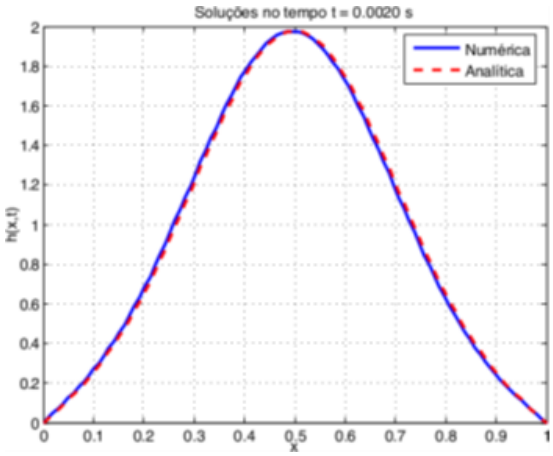

Figura 1 – Soluções analítica e numérica da Equação (3) implementada em ambiente Matlab. Fonte: Da autora

Como pode ser observado, Figura 1, as soluções apresentam uma evolução difusiva, se espalhando ao longo do tempo, com pulso inicial na região central, com a largura aumentando e altura de pico diminuindo, mantendo-se, assim, a conservação da massa.

Também é possível verificar a forma geral das curvas, que se mantém semelhante entre as soluções, com pequena diferença, conforme esperado: a solução analítica, representada com linha vermelha tracejada, indica a solução exata do modelo, e é importante ressaltar que seu desenvolvimento requer a abordagem de conceitos complexos de matemática, vinculados à resolução de equações diferenciais parciais. A linha contínua azul (Figura 1) representa a solução aproximada do modelo, adequada para simulações computacionais e útil em casos em que não existe a solução analítica. Importante ressaltar que tal solução está sujeita a erros numéricos e dependente do tamanho da malha: quanto menor o tamanho do passo dx, no domínio, e dt, no tempo, melhor a aproximação, mas os cálculos computacionais são mais lentos.

Visando a simulação de um cenário mais realista, assumiu-se como parâmetros: comprimento L=100 m, coeficiente de transmissividade do aquífero T=0,00005 m²/s (referente a aquífero de aproximadamente 50m de espessura, em meio de pouca porosidade e condutividade hidráulica baixa, de 0,000001m/s) e o armazenamento específico S=0,0001 (característico de aquíferos confinados), que representam as três principais características dos aquíferos confinados, Figura 2. Neste cenário utilizou-se a implementação da solução numérica, com condição inicial sendo função delta de Dirac h(x,0)=f(x)= δ(x−x0) e condições de contorno de Dirichlet homogêneas.

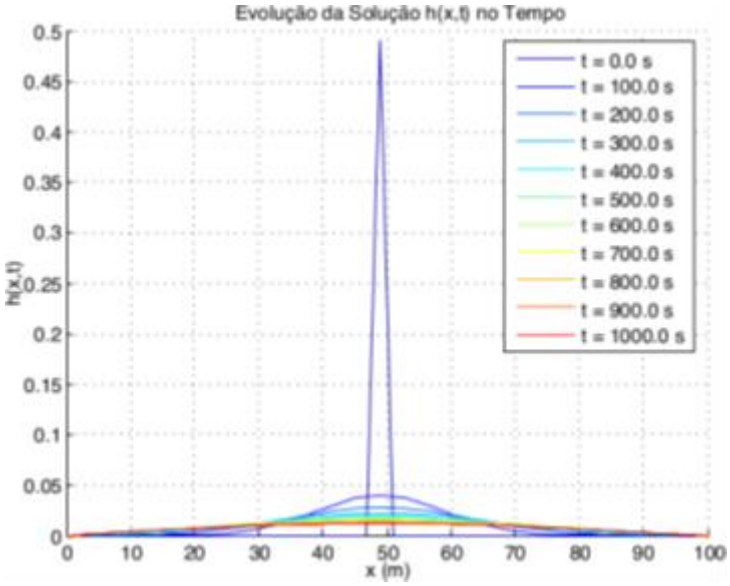

Figura 3 – Evolução de solução numérica ao longo do tempo. Fonte: da autora

Com base em análises, verifica-se na Figura 2, como o pulso localizado na região central do domínio físico se alarga e se achata, representando o efeito da difusão. Também se verifica no gráfico a simetria em torno da região central, como é esperado em virtude do pulso centrado e das condições de contorno homogêneas.

Importante ressaltar que é esperado que a área sob a curva se conserve, uma vez que a equação de difusão conserva a massa total, pois não há fonte ou sumidouro. A cada curva plotada (para cada valor de t), verifica-se um perfil de onda mais larga e mais baixa, indicando o espalhamento da massa.

CONCLUSÃO:

Avalia-se que estudos de modelagem matemática aplicados às águas subterrâneas são ferramentas relevantes que favorecem compreensões e predições de impactos ambientais.

A partir do estudo realizado, foi possível representar fenômenos ambientais complexos, como fluxo subterrâneo e o transporte de poluentes de aquíferos, baseado na equação diferencial parcial da difusão, com estudos teóricos e resoluções analíticas.

A resolução numérica do problema possibilitou a construção de soluções aproximadas com simulações computacionais em ambiente Matlab e favoreceu o teste de parâmetros e análise do modelo, dentro de um contexto de estudo e discussões sobre impacto ambiental. Essas simulações também possibilitaram comparações entre a solução analítica e numérica. Também foi possível verificar, por meio dessas simulações, o comportamento da difusão, simétrica em torno do ponto de aplicação da fonte, como previsto pela natureza da equação e da condição inicial adotada.

BIBLIOGRAFIA

CORSEUIL, H. X. e MARINS, M. D. M. (1997). Contaminação de águas subterrâneas por derramamentos de gasolina: o problema é grave? ***Revista Engenharia Sanitária e Ambiental***, 2:50–54.

HIRATA, R., SUHOGUSOFF, A. V., MARCELLINI, S. S., Villar, P. C., e MARCELLINI, L. (2019a). ***As águas subterrâneas e sua importância ambiental e socioe-conômica para o Brasil***. IGc/USP, São Paulo-SP.

RIBEIRO, M. L., LOURENCERRI, C., PEREIRA, S. Y., e MARCHI, M. R. R. (2007). **Contaminação de águas subterrâneas por pesticidas: avaliação preliminar**. Quim. Nova, 30:688–694

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. e MEADE, D. B.. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020