XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

Formulações e algoritmos para o problema da árvore geradora de comunicação ótima

Palavras-chave: Árvore Geradora de Comunicação Ótima, Programação Linear Inteira, Otimização Combinatória

Autores:

Guilherme Guidotti Brandt, IC, UNICAMP

Santiago Valdés Ravelo (orientador), IC, UNICAMP

INTRODUÇÃO:

O Problema da Árvore Geradora de Comunicação Ótima (Optimum Communication Spanning Tree Problem, ou OCT), introduzido por Hu (HU, 1974), é um problema de design de redes onde a topologia da rede é restrita a uma árvore geradora e seu custo corresponde à soma ponderada das distâncias entre determinados pares de nós. O problema é NP-difícil (JOHNSON; LENSTRA; KAN, 1978).

Existem diversos algoritmos exatos para o problema na literatura utilizando métodos de programação inteira (CONTRERAS; FERNÁNDEZ; MARÍN, 2010; LUNA-MOTA, 2016; ZETINA et al., 2019).

Neste trabalho, apresentamos e analisamos uma nova formulação para o problema com o menor número de variáveis de que temos conhecimento, junto a um algoritmo exato por *branch-and-cut* para o problema baseado nessa formulação.

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA:

Dado um grafo conexo $G = (V, E)$, uma função não-negativa $\omega : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ de peso nas arestas e uma função simétrica não-negativa $\psi : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, o OCT busca uma árvore geradora T de G que minimize o custo de comunicação, definido como:

$$C(T) = \sum_{\{i,j\} \in \binom{V}{2}} \psi(i,j)\, \omega(P_{ij}(T))$$

Onde $P_{ij}(T)$ é o caminho entre i e j em T.

Definimos também o conjunto $R = \left\{ \{i,j\} \in \binom{V}{2} \;\middle|\; \psi(i,j) > 0 \right\}$ dos *links* (pares de vértices com requisitos não-nulos).

FORMULAÇÃO:

Apresentamos abaixo uma formulação baseada em cortes, que não existe na literatura, até onde sabemos:

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{e \in E} \omega(e) y_e && && (1)\\
\text{s.a. } & x(E) = |V| - 1 && && (2)\\
& x(E[X]) \leq |X| - 1 && \forall X \subsetneq V, X \neq \emptyset && (3)\\
& y_e \leq \psi(R) x_e && \forall e \in E && (4)\\
& y(\partial(X)) \geq \psi(\partial_R(X)) && \forall X \subsetneq V, X \neq \emptyset && (5)\\
& x_e \in \{0, 1\} && \forall e \in E && (6)\\
& y_e \in \mathbb{R}_{\geq 0} && \forall e \in E && (7)
\end{aligned}
$$

Lema 1. *O subgrafo induzido pelo conjunto das arestas $\{e \in E \mid x_e = 1\}$ em uma solução para a formulação acima é uma árvore geradora de G.*

Lema 2. *Dado $e \in E$, em uma solução ótima do PLI, a variável y_e da formulação acima assume o valor*

$$y_e = \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j)$$

Onde P_{ij} é o caminho entre os vértices i e j na solução.

Demonstração. Seja T a árvore geradora induzida pelas variáveis x_e na solução, conforme o lema 1, e seja $e \in E$ qualquer.

Seja B_e o corte de arestas fundamental obtido a partir de $T - e$, e seja X o conjunto de vértices de uma das componentes conexas obtidas, de forma que $B_e = \partial(X)$.

Note que, como $B_e \subseteq \overline{T} \cup \{e\}$, temos que $x_f = y_f = 0$ para todas as arestas $f \in B_e$, $f \neq e$. Logo, $y(B_e) = y(e)$. Pela restrição 5 e como o corte fundamental separa os extremos de todos os caminhos que contém e, segue que $y(e) \geq \psi(\partial_R(X)) \geq \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j)$ para todo $e \in E$.

Nesse caso, como y_e aparece na função de custo com coeficiente não-negativo, é suficiente mostrar que $y_e = \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j)$ satisfaz as restrições, e portanto uma solução onde y_e é maior não pode ser ótima.

A única restrição de interesse neste caso é a restrição 5, onde temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{e \in \partial(X)} y_e &= \sum_{e \in \partial(X)} \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j)\\
&\geq \sum_{\{i,j\} \in \partial_R(X)} \psi(i,j)
\end{aligned}
$$

Note que para cada par de vértices $\{i,j\} \in \partial_R(X)$ existe pelo menos uma aresta $e \in \partial(X)$ tal que $e \in P_{ij}$, e portanto a desigualdade é válida. □

Corolário 1. *Em uma solução ótima,*

$$\sum_{e \in E} \omega(e) y_e = C(T)$$

ASPECTOS POLIÉDRICOS:

O lema 2 sugere a seguinte representação interna para o poliedro correspondente às soluções viáveis da formulação:

$$P_{OCT}(G, \psi) = \operatorname{conv}\left\{(\chi^T, f^T) \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E \mid T \text{ é árvore geradora de } G\right\}$$

Onde χ^T é o vetor de incidência de T e f^T é o vetor do fluxo de comunicação de T para R, definido por $f_e^T := \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j)$.

Este poliedro claramente não tem dimensão plena, visto que a restrição 2 é trivialmente satisfeita na igualdade para todas as soluções.

Como a projeção do poliedro no subespaço das variáveis χ^T corresponde exatamente ao poliedro das árvores geradoras de G ($P_{ST}(G)$), temos que $\dim(P_{OCT}(G,\psi)) \geq \dim(P_{ST}(G))$.

Se G for 2-conexo, $\dim(P_{ST}(G)) = |E| - 1$ (CHAOURAR, 2022), e segue que $\dim(P_{OCT}(G,\psi)) \geq |E| - 1$.

Mas podemos sempre supor que G é 2-conexo, desde que $|V| \geq 3$:

Teorema 1. *Podemos supor, sem perda de generalidade, que G é não-separável.*

Rascunho de demonstração. A árvore geradora de um grafo separável pode ser obtida pela união disjunta das árvores geradoras de seus blocos.

Além disso, se existe um vértice separador x em G, então todo caminho entre vértices em blocos separados por x passa por ele.

Podemos ajustar a função ψ pelo seguinte procedimento: para cada link $\{s,t\}$ separado por um vértice separador x, some $\psi(s,t)$ a $\psi(s,x)$ e a $\psi(x,t)$ e então zere $\psi(s,t)$.

É direto ver que resolver o problema original é equivalente a resolver o problema para cada bloco do grafo e tomar a união das soluções, e portanto reduzimos o problema ao caso não-separável. □

Corolário 2. *Se $|V| \geq 3$, pelo teorema 1, podemos supor que G é 2-conexo.*

Demonstração. Vide (BONDY; MURTY, 2008, teorema 5.1). □

ALGORITMO:

A ideia do algoritmo é primeiro encontrar restrições de eliminação de subciclo (SEC) violadas e, quando nenhuma existir, utilizando o fato de que toda solução inteira necessariamente induz uma árvore, analisar somente seus cortes fundamentais para obter restrições violadas na família 5.

Isso é suficiente, pelo teorema a seguir:

Teorema 2. *Se existe uma restrição de corte violada e o subgrafo induzido pela solução inteira é uma árvore T, então existe uma aresta $e \in T$ tal que o corte fundamental obtido a partir de $T - e$ tem sua restrição violada.*

Demonstração. Seja $X \subsetneq V$, $X \neq \emptyset$ tal que $y(\partial(X)) < \psi(\partial_R(X))$.

Suponha, por contradição, que para todo $e \in \partial(X)$ ou $y_e = 0$ ou $y_e \geq \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j)$, onde P_{ij} é o caminho entre i e j em T.

Defina $\Delta = \{e \in \partial(X) \mid y_e \geq \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j)\}$. Note que $\Delta = \partial(X) \setminus \{e \in E \mid y_e = 0\}$, e portanto existe pelo menos uma aresta em Δ no caminho entre cada par de vértices separados pelo corte (pois a solução é conexa e $y_e > 0$ para toda aresta na solução). Segue que

$$\sum_{e \in \Delta} \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j) \geq \psi(\partial_R(X))$$

Mas então

$$\psi(\partial_R(X)) > y(\partial(X)) = y(\Delta) \geq \sum_{e \in \Delta} \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j) \geq \psi(\partial_R(X))$$

O que é absurdo. Logo, existe $e \in \partial(X)$ tal que $0 < y_e < \sum_{\{i,j\}\colon e \in P_{ij}} \psi(i,j)$.

É direto ver que, então, $e \in T$ e o corte fundamental obtido a partir de $T - e$ tem sua restrição violada. □

Uma limitação dessa abordagem é que sua aplicação se limita a soluções inteiras, e portanto não permite calcular efetivamente a relaxação linear da formulação em tempo polinomial.

Algoritmo 1: Separação SEC/restrições de corte

Entrada: Variáveis $x_e \in \{0,1\}$ e $y_e \in \mathbb{R}_{\geq 0}\ \forall e \in E$

$S \leftarrow \{e \in E \mid x_e = 1\}$;

se $G[S]$ *é conexo* **então**

  $T \leftarrow G[S]$;

  para cada $e \in T$ **faça**

    $X, \overline{X} \leftarrow$ componentes conexas de $T - e$;

    se $y_e < \psi(\partial_R(X))$ **então**

      Adicione a restrição $y(\partial(X)) \geq \psi(\partial_R(X))$ à formulação

    fim

  fim

senão

  para cada *componente conexa* C *de* $G[S]$ **faça**

    Adicione a restrição $x(E[C]) \leq |C| - 1$ à formulação

  fim

fim

RESULTADOS EXPERIMENTAIS E DISCUSSÃO:

Para os experimentos, geramos instâncias aleatórias do problema, com ordens de 10, 15 e 20 nós e densidades de arestas de 10%, 30% e 50%. Os detalhes das instâncias geradas estão exibidos na tabela 1.

Instância	# Vértices	# Arestas	# Links
`dense-10`	10	45	45
`dense-15`	15	105	105
`dense-20`	20	190	190
`sparse-10-0_1-0_1`	10	13	13
`sparse-10-0_3-0_3`	10	22	19
`sparse-10-0_5-0_5`	10	32	29
`sparse-15-0_1-0_1`	15	23	25
`sparse-15-0_3-0_3`	15	38	40
`sparse-15-0_5-0_5`	15	60	62
`sparse-20-0_1-0_1`	20	34	31
`sparse-20-0_3-0_3`	20	65	67
`sparse-20-0_5-0_5`	20	119	102

Tabela 1: Parâmetros das instâncias usadas nos experimentos.

As formulações foram implementadas como modelos de programação linear inteira mista usando o otimizador Gurobi (Gurobi Optimization, LLC, 2024) com a linguagem C++.

Para cada instância e cada formulação, executamos o programa com o algoritmo correspondente, isoladamente, com um tempo limite de 300 segundos por instância. Os resultados estão apresentados na tabela 2.

Nosso algoritmo (`cut`) consegue provar otimalidade até 15 nós e densidade de 50% e uma instância de 20 nós com densidade de 10% (ou seja, por volta de 40 arestas), superando a outra formulação da literatura com número de variáveis comparável (`rooted`, baseada em árvores enraizadas, de Luna-Mota). Mesmo quando não encontra a solução ótima, o limitante encontrado pelo nosso algoritmo é significativamente melhor.

Ainda assim, a formulação por caminhos orientados (`path`, de Contreras) obtém resultados significativamente melhores, embora use um número muito maior de variáveis.

Instância	Formulação	Obj.	Lim.	Gap	Tempo (s)
sparse-10-0_1-0_1	path	652	652	–	0.01
	rooted	652	652	–	0.09
	cut	652	652	–	0.02
sparse-10-0_3-0_3	path	698	698	–	0.02
	rooted	698	698	–	3.37
	cut	698	698	–	0.10
sparse-10-0_5-0_5	path	847	847	–	0.03
	rooted	847	847	–	93.94
	cut	847	847	–	0.29
sparse-15-0_1-0_1	path	1869	1869	–	0.02
	rooted	1869	1869	–	3.92
	cut	1869	1869	–	0.16
sparse-15-0_3-0_3	path	1091	1091	–	0.04
	rooted	1091	103.00	0.90	300.00
	cut	1091	1091	–	0.41
sparse-15-0_5-0_5	path	1278	1278	–	0.10
	rooted	1282	44.86	0.96	300.01
	cut	1278	1278	–	1.75
sparse-20-0_1-0_1	path	1884	1884	–	0.03
	rooted	1884	1884	–	210.74
	cut	1884	1884	–	1.69
sparse-20-0_3-0_3	path	2622	2622	–	0.24
	rooted	2658	0	1.00	300.01
	cut	2622	2397.03	0.09	300.02
sparse-20-0_5-0_5	path	2092	2092	–	1.81
	rooted	2092	0	1.00	300.01
	cut	2273	1507.01	0.33	300.01

Tabela 2: Resultados dos experimentos computacionais para as implementações das formulações.

CONCLUSÕES:

Embora não tenham obtido resultados melhores que o atual estado da arte, a formulação e algoritmo apresentados parecem ser uma alternativa mais plausível para a redução do número de variáveis do que as outras formulações existentes, e esperamos que possam servir como base para novos estudos.

Em particular, o principal problema que observamos na formulação foi a fraqueza de sua relaxação linear, que dificulta a etapa de *pruning* do *branch-and-bound*. Sendo assim, uma linha de pesquisa interessante é a de buscar fortalecer a formulação com mais desigualdades válidas para o poliedro P_{OCT}.

BIBLIOGRAFIA:

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory*. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

CHAOURAR, B. The facets of the spanning trees polytope. *Mathematical Methods of Operations Research*, Springer, v. 96, n. 1, p. 113–121, 2022.

CONTRERAS, I.; FERNÁNDEZ, E.; MARÍN, A. Lagrangean bounds for the optimum communication spanning tree problem. *Top*, Springer, v. 18, p. 140–157, 2010.

Gurobi Optimization, LLC. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. 2024. Disponível em: ⟨https://www.gurobi.com⟩.

HU, T. C. Optimum communication spanning trees. *SIAM Journal on Computing*, SIAM, v. 3, n. 3, p. 188–195, 1974.

JOHNSON, D. S.; LENSTRA, J. K.; KAN, A. R. The complexity of the network design problem. *Networks*, Wiley Online Library, v. 8, n. 4, p. 279–285, 1978.

LUNA-MOTA, C. *The optimum communication spanning tree problem: properties, models and algorithms*. Tese (Doutorado) — Universitat Politécnica de Catalunya, 2016.

ZETINA, C. A. et al. Solving the optimum communication spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, v. 273, n. 1, p. 108–117, 2019. ISSN 0377-2217. Disponível em: ⟨https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221718306775⟩.