EXPLORANDO O INFINITO: AXIOMA DA ESCOLHA, ORDINAIS E CARDINAIS

Lucas Fernando Melo Silva; IMECC, UNICAMP
Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho (orientador); IMECC, UNICAMP

Palavras-chave: INFINITOS, ORDINAL, CARDINAL

Introdução

A teoria de conjuntos tem papel fundamental em diversos campos da matemática, e por si só já constitui uma área com objetos interessantes de serem estudados. Georg Cantor, no século 19, progrediu significativamente no desenvolvimento da área e da matemática ao estudar o infinito. Esse trabalho é um estudo sobre o infinito matemático, tratando sobre tamanhos, relações, interpretações e operações envolvendo conjuntos infinitos.

Enumerabilidade

Definição 0.1. *Dois conjuntos A e B são do mesmo tamanho se existir uma bijeção entre eles. Nesse caso, diz-se que A e B têm a mesma cardinalidade e se escreve $\#A = \#B$.*

Exemplo 0.2. *Os números naturais e os pares têm a mesma cardinalidade, pois a função que associa a cada número natural o seu dobro é uma bijeção entre os dois conjuntos.*

Teorema 0.3. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{Q}$ *são conjuntos enumeráveis.*

Em 1891, Cantor provou o seguinte teorema utilizando uma técnica hoje conhecida como Argumento da Diagonal de Cantor. É uma construção utilizada em diversas áreas para a obtenção de um objeto diferente de objetos já listados.

Teorema 0.4. *O conjunto das sequências de 0's e 1's ($\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) é não-enumerável.*

Demonstração. Cantor demonstra esse fato da seguinte forma: suponha que esse conjunto seja enumerável, isto é, que possa ser arranjado em uma lista. Construindo uma sequência de forma que o n-ésimo dígito seja diferente do n-ésimo dígito da n-ésima sequência da lista, obtemos uma sequência de zeros e uns que não está na lista dada. Absurdo. $\square$

$$\begin{array}{l}
s_1 = \mathbf{1}\,1111111111\cdots \\
s_2 = 0\,\mathbf{0}\,000000000\cdots \\
s_3 = 10\,\mathbf{1}\,10110111\cdots \\
s_4 = 110\,\mathbf{0}\,1100110\cdots \\
s_5 = 1101\,\mathbf{0}\,111001\cdots \\
\quad\vdots \qquad\qquad \ddots \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

Figura 1: Argumento da Diagonal de Cantor; autoria própria.

Essa, porém, não é a demonstração original de Cantor. Em 1874, Cantor enuncia e prova a seguinte proposição, que diz sobre a não-enumerabilidade nos números reais.

Teorema 0.5 (Cantor, 1874). *Dada qualquer definição de sequência infinita de números reais distintos entre si,*

$$\omega_1, \omega_2, ...\omega_v, ... \text{ (1)}$$

então em qualquer intervalo (α, β) *existe um número* η *que não está na sequência (1).*

Conseguimos construir bijeções dos números reais com alguns outros conjuntos, e com o resultado acima obter que também são conjuntos não-enumeráveis.

Teorema 0.6. *O conjunto dos números reais, o conjunto das partes de* $\mathbb{N}$ *e o conjunto das funções inteiro-positivas são não-enumeráveis.*

O seguinte teorema é interessante no sentido de que apresenta uma forma de sempre construir um conjunto maior do que um conjunto dado.

Teorema 0.7 (Cantor-Bernstein). *Para todo e qualquer conjunto X,* $\#\mathcal{P}(X) > \#X$.

Axioma da Escolha

O axioma da escolha é uma proposição matemática independente dos Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF), sendo extremamente útil para o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos.

Axioma 0.8 (Axioma da Escolha). *Seja X uma coleção qualquer de conjuntos não vazios. Então existe uma função f definida em X tal que* $f(x) \in x$, $\forall x \in X$. *f é chamada função escolha.*

As seguintes sentenças são equivalentes ao Axioma da Escolha, e também são utilizadas em outras áreas da matemática.

Axioma 0.9 (Lema de Zorn). *Seja X um conjunto parcialmente ordenado em que toda cadeia (subconjunto totalmente ordenado) em X tenha uma cota superior. Então existe* $x \in X$ *maximal.*

Definição 0.10 (Boa-ordem). *Uma relação de ordem total num conjunto A* $(<_A, A)$ *é dita boa-ordem se todo subconjunto de A possui um menor elemento com relação à ordem.*

Exemplo 0.11. $\mathbb{N}$ *é bem-ordenado pela relação usual de ordem, enquanto* $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$ *não são.*

Axioma 0.12 (Princípio da Boa-Ordenação). *Seja X um conjunto não-vazio. Então existe uma relação que bem-ordena X.*

Ordinais

Os ordinais em essência são conjuntos que representam todos os tipos de boa-ordem.

Definição 0.13. *Um conjunto X é dito transitivo se, e somente se, todo elemento de X é um subconjunto de X.*

Exemplo 0.14. $\{\varnothing\}$, $\varnothing$ *e* $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ *são conjuntos transitivos enquanto* $\{\{\varnothing\}\}$ *e* $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ *não são conjuntos transitivos.*

Definição 0.15. *Um ordinal é um conjunto transitivo bem-ordenado pela relação de pertencimento.*

Utilizando de ZF, von Neumann teve a ideia de definir números ordinais inicialmente através da operação de sucessor. O sucessor de um ordinal α fica definido como sendo $(\alpha + 1) := \alpha \cup \{\alpha\}$. Partindo do conjunto vazio, obtemos ordinais finitos
$0 := \varnothing$;
$1 := 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$;
$2 := 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
...
Depois disso, Neumann reúne todos os ordinais finitos num só conjunto (também ordinal), chamado de ω ou $\mathbb{N}$. Aplicando a operação de sucessor em ω obtemos ordinais transfinitos
$(\omega + 1) := \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, ..., \omega\}$;
$(\omega + 2) := (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\} = \{0, 1, ..., \omega, \omega + 1\}$;
...
Podemos continuar utilizando a ideia de reunir os ordinais e obtendo ordinais como $\omega \cdot 2, \omega^2, \omega^\omega$. Todos os ordinais obtidos dessa forma, entretanto, continuam sendo enumeráveis. Existe um ordinal não-enumerável?

Teorema 0.16. *O conjunto dos ordinais enumeráveis, representado por ω_1, é um conjunto não-enumerável.*

Demonstração. Perceba que ω_1 é transitivo e bem ordenado pelo pertencimento, portanto, é um ordinal. Note que, por definição, ω_1 é um ordinal maior do que todos os ordinais enumeráveis.

Agora, suponha que ω_1 seja um ordinal enumerável. Temos, assim, um ordinal enumerável maior do que todos ordinais enumeráveis, o que é um absurdo, pois o sucessor de um ordinal enumerável α qualquer é um ordinal enumerável maior do que α. $\square$

Uma ferramenta importante que trata sobre os números naturais é a indução. Analogamente, existe uma indução transfinita, que trata sobre os ordinais.

Teorema 0.17 (Indução transfinita)**.** *Seja C uma classe de ordinais. Se*
(i) $0 \in C$;
(ii) $\alpha \in C \implies \alpha + 1 \in C, \forall \alpha \in C$;
(iii) $\forall \gamma < \beta, \gamma \in C \implies \beta \in C$.
então C é a classe de todos ordinais $=: Ord$.

Com esse teorema, conseguimos provar a recursão transfinita, isso é, que a seguinte definição é válida para definir uma função com domínio na classe dos ordinais.

Teorema 0.18 (Recursão transfinita)**.** *Seja A uma classe e $f : \mathbb{P}(A) \times Ord \to Img(f) \subseteq A$ uma função. Então, existe uma única função g com domínio em Ord satisfazendo a seguinte propriedade:*
para qualquer α ordinal, $g(\alpha) = f((g[\alpha], \alpha))$.

Podemos, assim, definir operações entre ordinais recursivamente.

Definição 0.19 (Adição)**.** *Para qualquer ordinal α,*

i) $\alpha +_o 0 := \alpha$

ii) $\alpha +_o (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$, *para qualquer ordinal β;*

iii) $\alpha +_o \beta := \cup\{\alpha +_o \gamma | \gamma < \beta\}$, *para qualquer ordinal limite β.*

Definição 0.20 (Multiplicação)**.** *Para qualquer ordinal α,*

i) $\alpha \cdot_o 0 := 0$

ii) $\alpha \cdot_o (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$, *para qualquer ordinal β;*

iii) $\alpha \cdot_o \beta := \cup\{\alpha \cdot_o \gamma | \gamma < \beta\}$, *para qualquer ordinal limite β.*

Definição 0.21 (Exponenciação)**.** *Para qualquer ordinal α,*

i) $\alpha^0 := 1$

ii) $\alpha^{(\beta+1)} := \alpha^\beta \cdot \alpha$, *para qualquer ordinal β;*

iii) $\alpha^\beta := \cup\{\alpha^\gamma | \gamma < \beta\}$, *para qualquer ordinal limite β.*

A soma e o produto de ordinais não é comutativo. Por exemplo, $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$ e $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2$.

Podemos, também, definir a soma e o produto de ordinais de uma maneira geométrica. A soma de ordinais $\alpha +_o \beta$ é o ordinal associado a união disjunta entre α e β, considerando todos os elementos de α menores do que os de β. O produto $\alpha \cdot_o \beta$ é o ordinal associado ao produto cartesiano $\beta \times \alpha$ com a ordem lexicográfica.

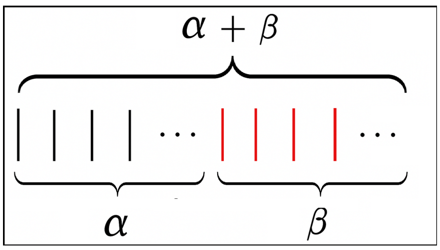

Figura 2: Soma de ordinais; autoria própria.

Cardinais

Os números cardinais, que representam a medida do "tamanho"de um conjunto, são definidos utilizando dos ordinais da seguinte forma

Definição 0.22. *Um cardinal é um ordinal κ tal que não exista bijeção entre κ e um ordinal menor do que κ. O cardinal de um conjunto A é o único cardinal tal que existe uma bijeção com A e é denotado por $|A|$.*

Definição 0.23. *A classe de todos os cardinais é representada por $Card$ e a de todos os cardinais infinitos representada por $Card(\infty)$.*

Teorema 0.24. *Ord e $Card$ são classes próprias, isso é, não são conjuntos.*

Para falar do cardinal de qualquer conjunto dado, o Axioma da Escolha é importante, pois primeiro precisamos bem-ordenar o conjunto (utilizando o Princípio da Boa-Ordenação) para obter o ordinal e posteriormente o cardinal associado ao ordinal.

Definimos as operações de soma e produto entre cardinais através das operações entre ordinais e a operação de tomar o cardinal de um conjunto dado.

Definição 0.25 (Soma)**.** *Sejam κ e μ cardinais, $\kappa + \mu :=| \kappa +_o \mu |$.*

Definição 0.26 (Produto)**.** *Sejam κ e μ cardinais, $\kappa \cdot \mu =| \kappa \cdot_o \mu |$.*

Teorema 0.27. *Existe um funcional $H : Ord \to Card(\infty)$ estritamente crescente.*

Podemos construir H utilizando a recursão transfinita. Tome o funcional $f : \mathbb{P}(Card(\infty)) \to Card(\infty)$ tal que $f(X)$ é o menor cardinal infinito κ tal que $\mu < \kappa$ para todo $\mu \in X$.

Por definição de H, temos que $H(0) = | \mathbb{N} |=: \aleph_0$. Utilizando essa definição de H e notação para um α cardinal qualquer ($H(\alpha) = \aleph_\alpha$), obtemos o que é conhecido como Série de Alephs, cardinais indexados por ordinais.

Conclusão

O estudo desses tópicos em teoria dos conjuntos além de desenvolver o pensamento da abstração matemática possibilita o contato com ferramentas e ideias poderosas na resolução de problemas em diversas áreas.

Referências

[1] da Costa Neto, M. A. Equivalências e aplicações do lema de zorn. *UFU* (2021).

[2] Garciá, J. L. *Intuitive axiomatic set theory.* Textb. Math. Boca Raton, FL: CRC Press, 2024.

[3] Jech, T. *Set theory.*, the third millennium edition, revised and expanded ed. Springer Monogr. Math. Berlin: Springer, 2003.

[4] Lima, E. L. *A course in analysis. Vol. 1. (Curso de analise. Vol. 1). 3rd ed*, vol. 1 of *Projeto Euclides.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1982.

[5] Stillwell, J. *Roads to infinity. The mathematics of truth and proof.* Wellesley, MA: A K Peters, 2010.