XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

Introdução à Geometria Riemmaniana e Fluxo de Ricci

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Riemmaniana, curvatura, variedades

Autores
Giovanna Scherer, IMECC - UNICAMP
(Diego Sebastian Ledesma), IMECC - UNICAMP

1 Introdução

A geometria riemmaniana é um ramo da geometria diferencial focado no estudo de variedades diferenciáveis que admitem uma métrica, chamada de *métrica Riemmaniana*. Para estudá-la, precisamos percorrer o caminho teórico que passa pelas definições de variedades diferenciáveis, conexões e tensores de curvatura. A partir destas definições, foi possível que chegassemos à definição de *fluxo de Ricci*.

Dizemos que uma variedade M é *diferenciável* se admite um atlas de cartas locais maximal $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, com $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sendo um homeomorfismo sobre a imagem, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, definidas em $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, são todas suaves.

Uma métrica é dita *Riemmaniana* se cada ponto $p \in M$ admite produto interno $(.,)_p$ no mapa tangente T_pM tal que para campos vetoriais X, Y $p \longrightarrow (X(p), Y(p))_p$ é diferenciável. Uma variedade diferenciável com métrica riemmaniana é dita *Variedade Riemmaniana*. Relacionado a campos vetoriais, temos ainda o colchete de Lie definido por

$$[X, Y] = XY - YX$$

, onde X e Y são campos vetoriais.

Dizemos que *conexão afim* em M é uma aplicação $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$, onde $\chi(M)$ é o espaço dos campos vetoriais suaves em M, que é linear e satisfaz a regra de Leibniz. Podemos a partir da conexão, definir uma *derivada covariante* de um campo vetorial, cuja notação é $\frac{DV}{dt}$.

Dados uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana g em M, temos que ∇ é *compatível com a métrica* se $\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(V_t, W_t) = 0$. onde V_t e W_t são campos vetoriais que variam ao longo do tempo em uma curva diferenciável γ.

Podemos enunciar o *teorema de Levi-Civita*, que diz que em uma variedade Riemanniana, existe uma única conexão afim que é simétrica e compatível com a métrica. Conexão que é chamada *conexão de Levi-Civita*, ou *conexão Riemanniana*. Em uma conexão Riemanniana ∇, é possível definir o *tensor de curvatura de Riemann*.

Dado três campos vetoriais $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, o tensor de curvatura é definido por $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$. De R, podemos obter a *curvatura de Ricci*, definida como:

$$\mathrm{Ric}_g(X, X)(p) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, Z_i)X, Z_i \rangle,$$

onde $\{Z_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Depois de feita tal construção, introduzimos o *fluxo de Ricci*, uma equação diferencial parcial que mostra uma métrica Riemanniana $g(t)$ ao longo do tempo, seguindo a equação

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_g.$$

onde g é uma métrica Riemmaniana.

2 Metodologia

Aqui, calculamos o fluxo de Ricci tanto para a esfera quanto para um espaço chamado cigarro de Hamilton.

Para a esfera de raio r, denotada por $\mathbb{S}^n_r$, com a métrica canônica $g = r^2 g_0$ induzida da métrica euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$. Chamamos de g_0 a métrica sobre a esfera de raio $r = 1$.

O tensor de Ricci é dado por:

$$\mathrm{Ric}_g = (n-1)g_0.$$

Em uma variedade Riemanniana, se $\tilde{g},\ g$ são duas métricas que estão relacionadas por $\tilde{g} = \lambda g$ para $\lambda > 0$ então :

$$\mathrm{Ric}_g = \mathrm{Ric}_{\tilde{g}};$$

Suponha, então, que a solução do fluxo de Ricci neste caso é uma métrica da forma $g_t = \lambda(t)g$.

Então com essa hipótese, a equação do fluxo será dada por:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g_t} = -2(n-1)g_0.$$

que pode ser escrita como

$$\lambda'(t)g = -2(n-1)g_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda'(t) = -2(n-1).$$

Portanto, temos que a solução do fluxo de Ricci para a esfera é:

$$g_t = (r^2 - 2(n-1)t)g_0.$$

Para o segundo exemplo, tome M a variedade Riemaniana em $\mathbb{R}^2$ com a métrica $g = \rho^2(dx^2 + dy^2)$ onde $\rho^2 = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. Por mudança de coordenadas cartesianas para polares, temos $(x, y) \to (r, \theta)$ onde r é a distância geodésica e θ ângulo polar. Portanto, a métrica g pode ser escrita como

$$g = dr^2 + \tanh(r)^2\ d\theta^2$$

Observe que neste caso, M é uma superfície e, portanto, o tensor de Ricci é da forma $Ric_g = Kg$ para K sendo a curvatura Gausssiana. Podemos calcular a curvatura gaussiana com essa métrica através de símbolos de Christoffel(ferramenta essencial da geometria diferencial) chegamos em $K = 2\rho^2$. Portanto, o tensor de Ricci é dado por:

$$\mathrm{Ric}_g = 2\rho^2 g.$$

Se tomarmos o seguinte campo vetorial $X = -2x\partial_x - 2y\partial_y$ então definimos a derivada de Lie, que é obtida pela regra de Leibniz aplicada ao colchete de Lie.

$$L_X g = (\partial_x(x) + \partial_y(y))(dx^2 + dy^2) + (\partial_y(x) + \partial_x(y))(dx \otimes dy + dy \otimes dx)) = -4\rho^2 g = -2Ric_g.$$

Seja $\phi_t : M \times \mathbb{R} \to M$ o fluxo de difeomorfismos de X. Definimos $g_t = \phi_t^* g$. Observamos que, para cada t temos que $\phi_t : (M, g_t) \to (M, g)$ é uma isometria, portanto

$$\phi_t^* Ric_g = Ric_{\phi_t^* g} = Ric_{g_t}.$$

Com isto, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_t &= \frac{d}{dt} \phi_t^* g \\ &= \phi_t^* L_Y g \\ &= \phi_t^*(-2Ric_g) \\ &= -2Ric_{\phi_t^* g} = -2Ric_{g_t} \end{aligned}$$

Portanto, g_t é solução do fluxo de Ricci.

3 Resultados

Obtemos que a métrica que varia ao longo do tempo para a esfera é $g_t = (r^2 - 2(n-1)t)g_0$, disso observamos que a métrica diminui ao longo do tempo, ou seja a própria esfera também irá encolher de maneira homotetica ao longo do tempo.

Agora para o cigarro de Hamilton, a evolução da métrica ao longo dessa variedade é definida como $g_t = \phi_t^* g$ e em particular, temos que esse fluxo de Ricci é um *solíton*, caracterizado por um fluxo da seguinte forma $-2Ric(g_0) = L_X g_0 - 2\lambda g_0$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Observe que neste caso, chegamos que $L_X g = -2Ric_g$, portanto vale que a solução da equação diferencial parcial é a de um solíton com $\lambda = 0$, e dizemos, portanto, que a métrica se manteve *estável*. Caso $\lambda > 0$, caracterizaria uma diminuição e $\lambda < 0$, uma expansão.

Referências

[1] Arthur L. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer, Heidelberg, 1987.

[2] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria Riemmaniana*. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[3] Peter Topping. *Lectures on the Ricci Flow*. Cambridge University Press, Oxford, 2006.