



Análise de vigas laminadas de Timoshenko com o Método dos Elementos Finitos (MEF)

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Viga de Timoshenko, Laminados

Autores:

Felipe Baptista Tavares, FEM, Unicamp
Prof. Dr Carlos Henrique Daros, FEM, Unicamp

1 Introdução

Os materiais compósitos são, cada vez mais, essenciais para os diversos setores industriais: naval, aeronáutico, automobilístico e construção civil. Tal importância é devido, dentre outros fatores, à rigidez específica alta em relação aos metais, que sempre dominaram as principais aplicações de engenharia.

A estrutura dos compósitos consiste em fibras de um material resistente que estão colocadas em uma matriz. Além disso, é possível fabricar uma peça com diversas camadas que podem ter diferentes fibras com diferentes orientações. Essa versatilidade dos materiais compósitos é de grande interesse, já que é possível manipular as propriedades da estrutura a ser projetada, o que não ocorre com os metais, pois são isotrópicos. Em contrapartida, a anisotropia decorrente das orientações das fibras requer o desenvolvimento de teorias robustas para que o comportamento do material seja bem representado.

O projeto de Iniciação Científica tem como objetivo introduzir o estudo do método dos elementos finitos e dos métodos de energia, em especial o princípio do trabalho virtual (PTV). Foram tratados os modelos de barra, viga de Euler-Bernoulli, pórtico e a viga de Timoshenko. O estudo foi baseado nos livros [1] e [2].

A viga de Timoshenko incorpora o cisalhamento da seção transversal, o que a viga de Euler-Bernoulli não faz. Tal diferença na modelagem entre as duas vigas é particularmente útil para as vigas compósitas, pois como há camadas de materiais diferentes em contato, a influência da deformação de cisalhamento é mais pronunciada.

O bom entendimento dos modelos básicos das estruturas de engenharia, como a barra e a viga, permite a posterior aplicação no desenvolvimento de materiais para as indústrias responsáveis pelo avanço tecnológico da sociedade como um todo.

2 Metodologia

2.1 Viga de Timoshenko

O Princípio do Trabalho Virtual estabelece que se um corpo está em equilíbrio durante uma distorção virtual, o trabalho virtual externo δW é igual ao trabalho virtual interno δU . A recíproca é verdadeira: se $\delta U = \delta W$, a estrutura está em equilíbrio.

O PTV é aplicado para determinar a equação que governa o equilíbrio da estrutura. Para a viga de Timoshenko, o PTV é escrito em termos de integrais no eixo da viga:

$$\int_0^L \left[\delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) M + \delta \gamma_{xz} Q \right] dx = \int_0^L (\delta w f_z + \delta \theta m) dx + \sum_i \delta w_i P_i + \sum_j \delta \theta_j M_j^c \quad (1)$$

O trabalho virtual interno realizado pelo momento fletor M e a força de cisalhamento Q está no lado esquerdo da equação. O lado direito representa o trabalho virtual externo feito por uma carga distribuída f_z , momento distribuído m , força pontual P_i e momento concentrado M_j^c .

A equação 1 envolve apenas a primeira derivada da deflexão (w) e da rotação (θ), portanto é possível utilizar uma interpolação linear.

O método dos elementos finitos tem como característica básica dividir o domínio do problema em pequenos subdomínios, dentro dos quais são utilizadas aproximações das grandezas físicas como a deflexão w e rotação θ com base nos deslocamentos de pontos conhecidos como nós.

Para os exemplos a seguir, o tipo de elemento utilizado foi o linear, ou seja: há dois nós (1 e 2) e o deslocamento no interior desse elemento é aproximado por uma reta. Resumidamente, a formulação de um problema com o MEF necessita escrever as variáveis da equação 1 em função da interpolação utilizada para os deslocamentos no elemento.

A equação de equilíbrio para o elemento segue a forma padrão:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \quad (2)$$

$\mathbf{K}^{(e)}$ é a matriz de rigidez do elemento, onde tem-se $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_s^{(e)} + \mathbf{K}_b^{(e)}$, contribuições do cisalhamento e da flexão, respectivamente.

$\mathbf{a}^{(e)}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento. $\mathbf{f}^{(e)}$ é o vetor de forças nodais equivalentes devido aos carregamentos distribuídos e $\mathbf{q}^{(e)}$ é o vetor de forças nodais de equilíbrio.

Com as equações de equilíbrio para cada elemento individual, é realizado o processo de montagem, que consiste em impor o equilíbrio de cada nó. O sistema global de equilíbrio é da forma:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3)$$

A matriz \mathbf{K} é a matriz global de rigidez. Ela é uma matriz quadrada cuja ordem é o número de graus de liberdade do problema. \mathbf{f} é o vetor de forças externas, agrupando a contribuição das cargas distribuídas e dos esforços concentrados. \mathbf{a} é o vetor de deslocamentos a ser resolvido através do sistema linear da equação 3.

Em posse dos valores dos deslocamentos nodais, é realizada a etapa de **pós-processamento**. Ela consiste em retornar a cada elemento individual e realizar o cálculo dos esforços internos como momento fletor, força cortante, tensão normal e de cisalhamento.

É importante lembrar que o MEF atinge, na maioria dos casos, soluções aproximadas para o problema a ser resolvido. Além disso, como os esforços internos envolvem derivadas dos deslocamentos, o erro entre a solução do MEF e os valores reais é maior.

Um aspecto importante do elemento de 2 nós da viga de Timoshenko é o chamado travamento do cisalhamento. As matrizes de rigidez $\mathbf{K}_b^{(e)}$ e $\mathbf{K}_s^{(e)}$ são avaliadas numericamente usando uma quadratura de Gauss 1D.

A integração exata de $\mathbf{K}_b^{(e)}$ utiliza um ponto de Gauss, sem problemas. Porém, $\mathbf{K}_s^{(e)}$ necessita de dois pontos de Gauss. Essa integração exata da matriz de rigidez do cisalhamento, para vigas finas, cujo comprimento é bem maior que a altura, aumenta a rigidez do elemento e os valores de deslocamentos nodais se tornam menores do que esperado.

A princípio, isso desqualificaria o elemento de 2 nós da viga de Timoshenko, mas é possível integrar $\mathbf{K}_s^{(e)}$ com um ponto de Gauss, o que aumenta a flexibilidade da malha e gera valores mais coerentes.

A sub-integração gera um erro na aproximação do deslocamento, no entanto conforme o número de elementos da malha aumenta, o erro diminui. Portanto, o elemento de 2 nós da viga de Timoshenko com integração reduzida de $\mathbf{K}_s^{(e)}$ fornece bons resultados para vigas finas e grossas.

2.2 Compósitos

Os materiais compósitos são constituídos de fibras, normalmente alinhadas em uma única direção, embutidas em uma matriz. As fibras são dispostas em camadas, que podem ter orientações e materiais diferentes.

Em cada camada, as propriedades são aproximadas a partir da regra da mistura:

$$E_c = V_f E_f + (1 - V_f) E_m, \quad \rho_c = V_f \rho_f + (1 - V_f) \rho_m \quad (4)$$

Os parâmetros constitutivos da seção são calculados a partir das propriedades em cada camada k , através da integração numérica:

$$\hat{D}_a = \sum_{k=1}^{n_l} (z_{k+1} - z_k) b_k E^k; \quad \hat{D}_s = k_z \sum_{k=1}^{n_c} (z_{k+1} - z_k) b_k G^k \quad (5)$$

$$\hat{D}_b = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n_l} (z_{k+1}^3 - z_k^3) b_k E^k; \quad \hat{D}_{ab} = - \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{2} (z_{k+1}^2 - z_k^2) b_k E^k \quad (6)$$

Os termos representam, respectivamente, a rigidez axial, a rigidez de cisalhamento, a rigidez de flexão e a rigidez do acoplamento axial-flexional. Essa última é diferente de zero nos casos em que as camadas não são simétricas em relação ao eixo x . No projeto, a viga considerada é simétrica.

A formulação de elementos finitos utilizada para o estudo das vigas compósitas foi o elemento de 2 nós da viga de Timoshenko, já que a viga de Timoshenko é mais adequada para materiais compósitos em relação a viga de Euler-Bernoulli.

3 Resultados e Discussão

3.1 Seção homogênea

Foi feito um programa computacional para validação do modelo de viga de Timoshenko para a seção transversal homogênea. Foi utilizado um exemplo com solução analítica para comparação com a solução numérica gerada pelo código.

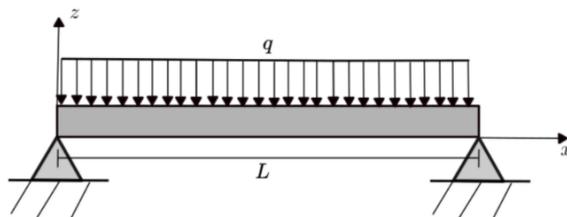


Figure 1: Viga com carga uniforme

E	ν	k_z	q	b
10^6	0.25	5/6	1	1

Table 1: Valores numéricos utilizados (SI)

A figura 2 mostra a diferença entre as soluções numéricas, com integrações exata e reduzida, e a solução analítica para uma viga fina:

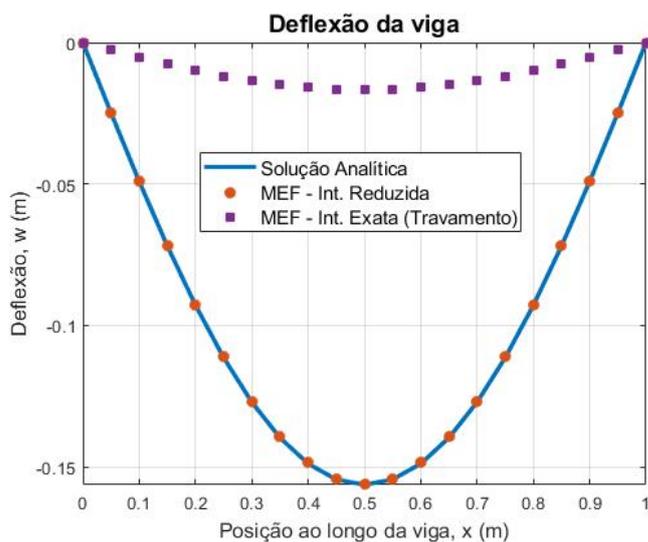


Figure 2: Comparação de deflexões para viga homogênea fina

É possível observar o efeito do travamento do cisalhamento, pois a solução utilizando a integração exata possui deflexão consideravelmente menor. Enquanto isso, a integração reduzida da matriz de rigidez do cisalhamento proporcionou resultados próximos à real.

Foram utilizados 20 elementos de comprimento igual, e com isso, o erro introduzido pela integração reduzida foi amortecido, sendo obtido um erro de 0,4% na posição de 0.5 metros, onde a deflexão é máxima.

Ao mudar a altura da viga para ela se tornar grossa, o travamento diminui como é visto na figura 3:

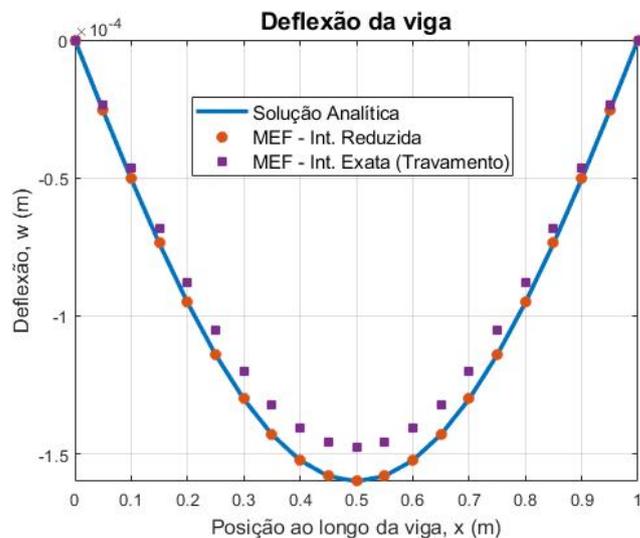


Figure 3: Comparação de deflexões para viga homogênea grossa

Além do exemplo com carga constante, foram testadas as cargas triangulares e senoidais. Ambas obtiveram resultados semelhantes, com a integração reduzida sendo válida para o elemento de 2 nós da viga de Timoshenko para seção homogênea. Portanto, esse é o tipo de elemento que deve ser utilizado para a viga de 2 nós de Timoshenko.

3.2 Seção laminada

O exemplo utilizado é uma viga pino-pino, com uma força pontual $F_0 = 1000$ N no centro. A caracterização da seção transversal é importante nesse problema. O laminado é composto por um tecido de carbono-grafite, cujas propriedades estão na tabela 2. Ele possui 8 camadas, do mesmo material, com orientações dadas, em relação ao eixo x , por $[0, 45, -45, 90, 90, -45, 45, 0]$, ou seja: há simetria. A viga possui comprimento de 15 m e largura de 1 m. A altura varia com o caso analisado, tornando a viga fina ou grossa.

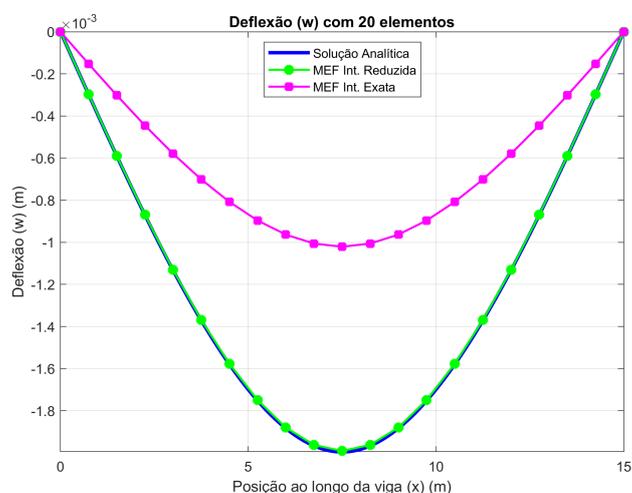


Figure 4: Comparação de deflexões para viga compósita fina

E_{xx} (GPa)	E_{yy} (GPa)	E_{zz} (GPa)	G_{xy} (GPa)	G_{xz} (GPa)	G_{yz} (GPa)	ν_{xy}	ν_{yx}
173.058	33.094	5.171	9.377	8.274	3.240	0.036	0.0069

Table 2: Propriedades do tecido carbono-grafite

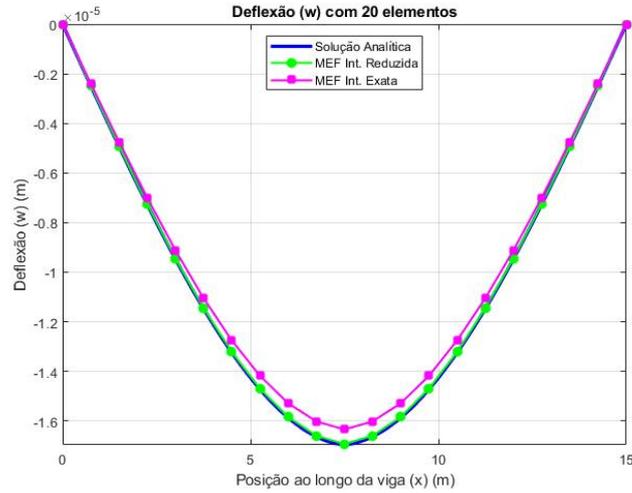


Figure 5: Comparação de deflexões para viga compósita grossa

A figura 4 mostra a deflexão da viga compósita fina para o exemplo. A influência do travamento do cisalhamento é clara. Foram feitos testes em que ao aumentar o número de elementos, de fato a solução da integração exata tem seu erro diminuído, embora ainda esteja presente.

A figura 5 indica o comportamento do problema quando a viga é grossa, mantidos os outros parâmetros iguais. O travamento do cisalhamento foi diminuído, embora ainda esteja presente.

4 Conclusões

O projeto de Iniciação Científica proporcionou a oportunidade de entender melhor os modelos de elementos finitos em relação ao que é visto na graduação de Engenharia Mecânica.

Foi possível mostrar a influência do travamento do cisalhamento relacionado com o tipo da viga sendo solicitada (fina ou grossa). Além disso, pode-se entender como a modelagem da viga laminada é mais complexa em relação à viga homogênea e como sua diferença física se revela na modelagem matemática

Os resultados obtidos são condizentes com a teoria, portanto o desempenho pode ser considerado satisfatório. Para o Relatório Final da PIBIC, resta rodar mais simulações, especialmente para as vigas compósitas, variando as condições de contorno, carregamento e aspecto da viga.

References

- [1] K. Morgan. O. C. Zienkiewicz. *Finite Elements and Approximation*. A wiley-interscience Publication (John Wiley Sons), 1976.
- [2] Lee. K. H. Wang. C. M., Reddy. J. N. *Shear Deformable Beams and Plates. Relationships with Classical Solutions*. Elsevier, Oxford, UK, 2000.