Estudo do Método de Galerkin Aplicado à Resolução da Equação de Reynolds em Mancais Hidrodinâmicos

Palavras-Chave: Mancal hidrodinâmico, Método de Galerkin, Método das Diferenças Finitas.

Autores:
Enzo Vicente Garcia, FEM – UNICAMP
Prof. Dr. Thales Freitas Peixoto FEM - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Com a crescente demanda por máquinas mais eficientes, o estudo de mancais hidrodinâmicos — componentes que sustentam e guiam eixos rotativos em sistemas como turbomáquinas e motores — torna-se cada vez mais relevante. A distribuição de pressão no filme de óleo lubrificante presente nesses mancais é descrita pela equação de Reynolds, cuja resolução tradicional via método das diferenças finitas pode ser computacionalmente custosa.

Este trabalho propõe a aplicação do Método de Galerkin como alternativa mais eficiente para a resolução da equação de Reynolds, com foco em mancais axiais compostos e radiais cilíndricos. A abordagem permite, além de ganhos em desempenho computacional, a obtenção de soluções semi-analíticas para o campo de pressão e forças hidrodinâmicas, com potencial para análises mais rápidas e precisas. As soluções obtidas foram implementadas em MATLAB e comparadas ao método tradicional, isto é, o Método das Diferenças Finitas, afim de evidenciar as vantagens do Galerkin em precisão e tempo de simulação.

METODOLOGIA:

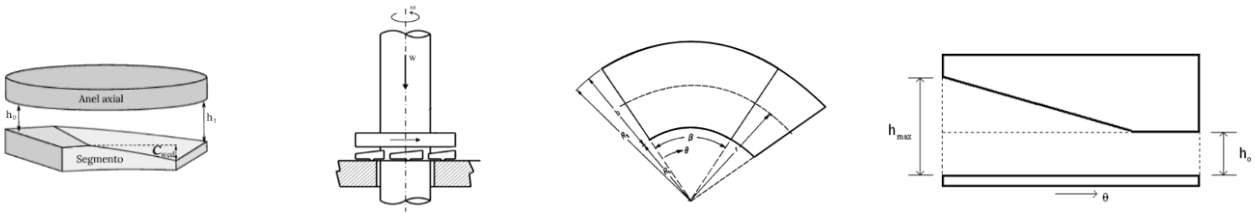
Os estudos de mancais hidrodinâmicos — radiais e axiais — se desenvolvem a partir da hipótese de "movimento viscoso lento", na qual os termos de pressão e viscosidade são predominantes. Essa hipótese permite a simplificação das equações de Navier-Stokes e levou à formulação da equação de Reynolds por Osborne Reynolds, em 1886. A equação (1) representa a equação de Reynolds em coordenadas cartesianas; a equação (2), em coordenadas polares; e a equação (3), em coordenadas cilíndricas, sendo esta última especialmente útil para geometria de mancais circulares.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\cdot\tilde{u}\cdot\mu\frac{\partial h}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rh^3\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)=6\cdot\tilde{u}\cdot\mu\frac{\partial h}{\partial \theta} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)=6\cdot\omega\cdot\mu\frac{\partial h}{\partial \theta} \tag{3}$$

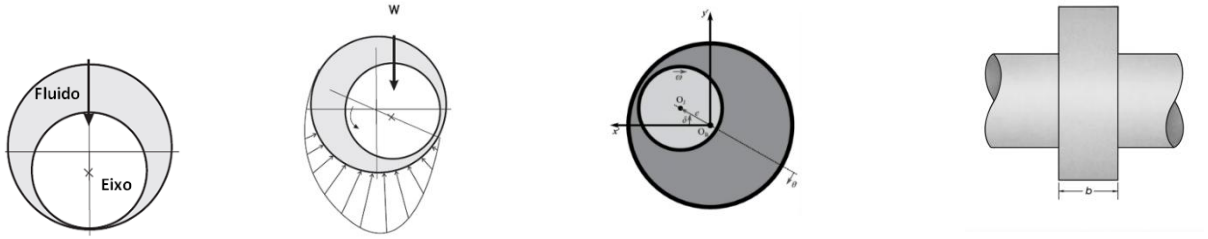
As figuras 1a e 1b apresentam a visualização de um mancal hidrodinâmico axial.



(a) Geometria do segmento **(b)** Em rotação **(c)** Vista superior **(d)** Vista lateral

Figura 1: Configuração de um mancal hidrodinâmico axial estudado.

As figuras 2a e 2b, por sua vez, são, respectivamente, representações de um mancal hidrodinâmico radial em repouso e em funcionamento com um gradiente de pressão formado no óleo lubrificante a partir da rotação do eixo



(a) Em repouso **(b)** Em rotação **(c)** Vista frontal **(d)** Vista lateral

Figura 2: Configuração de um mancal hidrodinâmico radial estudado

Durante o desenvolvimento do trabalho, diversos casos foram explorados com o objetivo de testar a aplicação do método em diferentes contextos. Dentre eles, destacam-se:

(a) o Mancal axial Fixo - Inclinado unidimensional;
(b) o Mancal axial Fixo - Inclinado bidimensional;
(c) o Mancal axial Fixo Composto;
(d) e o Mancal axial Fixo - Inclinado em coordenadas polares.

Entretanto, a atenção principal foi direcionada para dois modelos de maior complexidade, relevância técnica e que foram também desenvolvidos por Chatzisavvas[1]

(e) o Mancal Axial Fixo Composto (Figura 1) em coordenadas cilíndricas, e
(f) o Mancal Radial cilíndrico (Figura 2).

O Método de Galerkin teve origem no artigo publicado em 1915 pelo engenheiro e matemático russo Boris Galerkin, no qual ele estudava o equilíbrio elástico de hastes e placas finas. Como destacado por Fletcher '*Essencialmente, qualquer problema cujas equações governantes possam ser descritas por equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais ou equações integrais, é, em princípio, candidato à aplicação do método de Galerkin*'.

Este método pertence à classe dos denominados métodos dos resíduos ponderados, que têm como objetivo encontrar soluções aproximadas para equações diferenciais do tipo:

$$\mathcal{L}(u) + f = 0 \quad em \quad D \tag{4}$$

em que $\mathcal{L}$ é um operador linear diferencial e u representa a solução exata do problema. A estratégia consiste em buscar uma solução aproximada no domínio por meio de funções base que sejam facilmente diferenciáveis e integráveis.

A solução aproximada pode ser expressa como:

$$u_a(x,y) = u_0(x,y) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot \phi_{i(x,y)} \cdot \psi_{j(x,y)} \tag{5}$$

onde $u_0(x,y)$ é uma função que satisfaz exatamente as condições de contorno, $\phi_{i(x,y)}$ e $\psi_{j(x,y)}$ são as chamadas *trial functions*, que desempenham papel central no método, e a_{ij} são os coeficientes a serem determinados por meio da resolução de um sistema de equações dado pelas equações (6) e (7), onde R é o resíduo obtido pela substituição da função de aproximação na equação diferencial e (6) corresponde à projeção desse resíduo sobre as funções teste, definindo sua ortogonalidade. Como ressaltado por Finlayson e Scriven [3], a escolha dessas funções aproximadoras pode ser determinante na aplicação eficaz do Método dos Resíduos Ponderados, sendo considerada por muitos autores uma das etapas mais críticas do processo. Apesar disso, não há um consenso sobre quais funções seriam ideais, já que frequentemente diversos conjuntos de funções admissíveis são possíveis, sem que se possa afirmar objetivamente qual é o "melhor".

$$\left(R, \phi_k(x,y) \cdot \psi_l(x,y)\right) = 0 \tag{6}$$

$$R(a_0, a_1, \dots a_{NM}) = \mathcal{L}(u_a) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot \mathcal{L}\left(\phi_{i(x,y)} \cdot \psi_{j(x,y)}\right) \tag{7}$$

Segundo Fletcher (1984), quatro condições principais devem ser respeitadas para a aplicação do Método de Galerkin tradicional, conforme utilizado neste trabalho:

1. As *test functions* $\phi_k(x,y)$ e $\psi_l(x,y)$ devem ser escolhidas da mesma família das *trial functions* $\phi_{i(x,y)}$ e $\psi_{j(x,y)}$;
2. As *trial* e *test functions* devem ser linearmente independentes;
3. As funções utilizadas devem ser os N primeiros membros de um domínio funcional adequado;
4. As *trial functions* devem satisfazer exatamente as condições de contorno (e iniciais, se aplicável).

Para os modelos considerados neste trabalho, a equação de Reynolds foi adimensionalizada (8) e (10) e reescrita nas respectivas coordenadas, a saber: polar e cilíndrica, respectivamente.

1. Mancal Axial Fixo Composto

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{r}\bar{h}^3\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}}\right)+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{h}^3\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}\right)=12\cdot\pi\cdot\bar{r}\left(\frac{R_2}{L}\right)^2\frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta} \tag{8}$$

Onde a espessura de filme adimensional é $\bar{h}=h_0+\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)$

A implementação do método de Galerkin foi feita utilizando dois tipos de aproximação baseado nas condições de contorno.

$$\bar{p}_a(r,\theta)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\sin\left(j\pi\frac{\theta}{\beta}\right)sin\left(i\pi\frac{\bar{r}-r_0}{1-r_0}\right) \tag{9.a}$$

$$\bar{p}_a(r,\theta)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\sin\left(j\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\left[\left(\frac{\bar{r}-r_0}{1-r_0}\right)^i-\left(\frac{\bar{r}-r_0}{1-r_0}\right)^{i+1}\right] \tag{9.b}$$

Para este caso, a implementação do método de Galerkin gerou um sistema linear do tipo

$$\begin{bmatrix} {G_{11}}^{11} & {G_{12}}^{11} & \dots & {G_{MN}}^{11} \\ {G_{11}}^{12} & {G_{12}}^{12} & \dots & {G_{MN}}^{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {G_{11}}^{MN} & {G_{12}}^{MN} & \dots & {G_{MN}}^{11} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{MN} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

2. Mancal Radial Cilíndrico

$$\frac{\lambda^2}{4}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{h}^3\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta} \tag{11}$$

Onde a espessura de filme adimensional $\bar{h}=1+\epsilon\cdot\cos(\theta)$ e λ_{radial} é a razão diâmetro/comprimento.

A implementação do método de Galerkin foi feita utilizando dois tipos de aproximação baseado nas condições de contorno.

$$\bar{p}_a(z,\theta)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left[a_{ij}\sin(j\theta)+b_{ij}cos(j\theta)\right]\sin(m\pi z) \tag{12.a}$$

$$\bar{p}_a(z,\theta)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left[a_{ij}\sin(j\theta)+b_{ij}cos(j\theta)\right]\left(z^i-z^{i+1}\right) \tag{12.b}$$

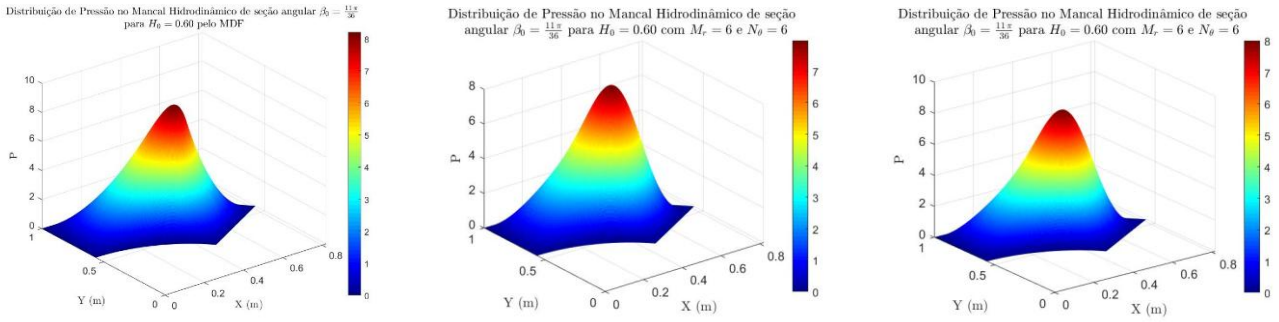
Para este caso, a implementação do método de Galerkin gerou um sistema linear do tipo

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{NMxNM} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{NMxNM} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_{NMx1} \\ \boldsymbol{b}_{NMx1} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{c}_{NMx1} \\ \boldsymbol{d}_{NMx1} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Em primeira análise, faz-se interessante comparar o erro relativo entre a solução obtida pelo método de Galerkin e pelo MDF para o Manca axial Fixo Composto. A solução numérica foi ainda comparada com os resultados de Vieira[2]. É

necessário notar que essa comparação com o MDF deve ser feita uma vez que não há uma formulação analítica para este tipo de mancal.



(a) MDF **(b)** Trigonométrica + Polinomial **(c)** Trigonométricas

Figura 3: Comparação do campo de pressão sobre um segmento de mancal resolvida pelo Método das Diferenças finitas e pelo método de Galerkin com as diferentes funções de aproximação

Como constatado e mencionado anteriormente, pode não haver ao certo as 'melhores' funções de aproximação e sim um conjunto que satisfaça as condições de contorno e se adequem aos diferentes problemas.

Diversas conclusões podem ser tiradas a partir da análise acerca da influência do número de funções, da influência de H_0 e da razão λ_{axial} apresentadas na figura (4):

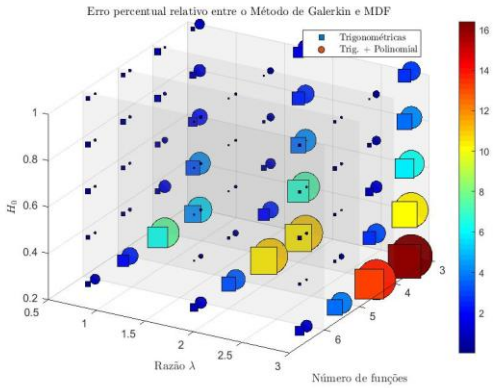
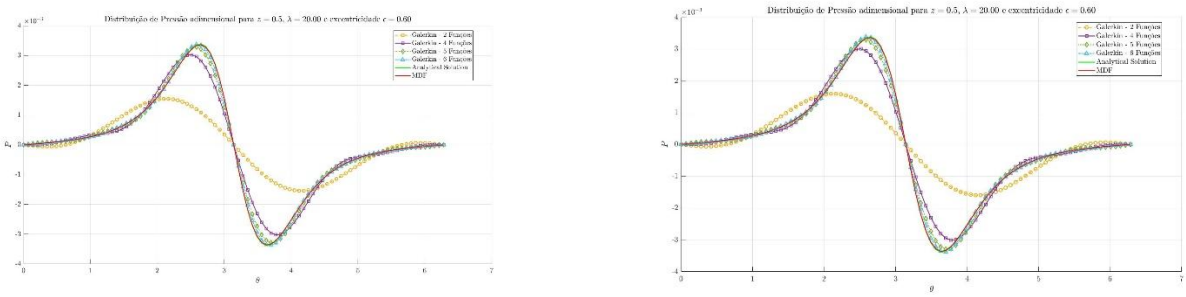


Figura 4: Comparação da combinação de funções trigonométricas (9) e trigonométricas com polinomial (10) para o mancal axial.

- Em geral, aumentar N e M tende a reduzir o erro relativo, como esperado no método de Galerkin. Isso é visualmente evidente na Figura 4 porque os marcadores (em sua maioria) ficam menores e mais frios (azulados) à medida que se move no eixo Y da esquerda para a direita.
- O erro relativo aumenta conforme H_0 diminui, principalmente para valores $H_0 < 0.5$, sugerindo que a solução se torna mais sensível à resolução da base nesse regime. Isso é particularmente visível nas regiões inferiores do eixo Z, onde os marcadores são maiores e de cores mais quentes.
- Os círculos (combinadas) tendem a apresentar erros menores (cores mais frias e tamanhos menores) em diversas configurações, especialmente para valores intermediários ou baixos de H_0 .
- Os cubos (apenas trigonométricas) são geralmente menos eficazes em capturar a complexidade da solução, sobretudo em regiões de transição como $\lambda_{axial} > 2$ e $H_0 < 0.6$.
- Erros maiores são mais comuns para valores maiores de λ_{axial} (à direita no eixo Y), especialmente se N é pequeno e a base é apenas trigonométrica. Isso indica que o problema se torna mais difícil de resolver nesses casos, talvez por maior gradiente ou comportamento não harmônico da solução.

As figuras (5.a) e (5.b) mostram as distribuições de pressão para o segundo mancal analisado (mancal radial), fazendo um comparativo com a solução analítica para a teoria de mancal curto, para validação dos resultado.



(a) Polinomial + Trigonométrica (b) Trigonométricas

Figura 5: Distribuição de pressão para um mancal radial com $\lambda = 20$ e excentricidade $\epsilon = 0.6$ para a solução analítica, MDF e Galerkin

Para este caso, também foi feito um comparativo entre as aproximações com funções puramente trigonométricas, como proposta por Chatzissavas, e polinomial com trigonométrica. A comparação do erro relativo entre as forças

Tabela 1: Comparação do erro relativo em porcentagem (%) das forças tangenciais para o MDF com malha de um grid 91x91 com o Método de Galerkin utilizando 2, 3, 5 e 6 funções de aproximação.

ϵ	MDF	Ga (2 f.)	Ga (3 f.)	Ga (5 f.)	Ga (6 f.)	ϵ	MDF	Ga (2 f.)	Ga (3 f.)	Ga (5 f.)	Ga (6 f.)
0.1	0.12	0.13	0.10	0.10	0.10	**0.5**	0.24	12.83	0.64	0.28	0.23
0.2	0.13	0.47	0.12	0.12	0.12	**0.6**	0.32	24.78	2.25	0.74	0.40
0.4	0.18	5.57	0.24	0.18	0.17	**0.8**	0.76	62.91	22.73	11.70	5.73

CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos nesta pesquisa:

- O método de Galerkin é promissor, podendo diminuir o custo computacional para diversas tarefas que atualmente são dependentes de iterações, como a determinação da espessura de fluido necessário para que o mancal suporte determinada carga;
- A escolha de funções teste é ampla, mas de modo geral, funções trigonométricas devem ser utilizadas para descrever geometrias que dependem de ângulos, como nos casos mencionados, enquanto que funções polinomiais devem ser utilizadas nos demais casos;
- Bases trigonométricas não necessariamente apresentam os melhores desempenhos. Neste trabalho, mostrou-se que a combinação de polinômio com funções trigonométricas pode produzir menor erro, mesmo que não sejam estritamente ortogonais, já que o método de Galerkin apenas se beneficia da ortogonalidade em certas ocasiões, mas não impõe a necessidade.
- Espessuras muito finas de filmes de óleo lubrificante demandam maiores números de funções n método de Galerkin;
- De modo geral, 4 ou 5 funções bastam para que o erro de aproximação seja menor do que 1%, principalmente no caso de mancais radiais.
- Há um grande empecilho no uso do Método de Galerkin que consiste na escolha das melhores funções.

BIBLIOGRAFIA

1. CHATZISAVVAS, Ioannis. **Efficient thermohydrodynamic radial and thrust bearing modeling for transient rotor simulations**. 2018.

2. VIEIRA, Leonardo Carpinetti. **Análise de mancais axiais sob lubrificação hidrodinâmica**. 2011. Tese de Doutorado. [sn].

3. FINLAYSON, B. A.; SCRIVEN, L. E. *The method of weighted residuals – A review*. Applied Mechanics Reviews, v. 19, n. 9, p. 735–748, 1966.

4. FLETCHER, Clive AJ. Computational galerkin methods. In: **Computational galerkin methods**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1984. p. 72-85.