XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

Explorando modelos matemáticos que usam equações diferenciais: aplicações em biologia e engenharia de tráfego

Raíssa Kazue Otsuka Marques
Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
IMECC – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Modelagem matemática, Órbita Periódica.

2025

1 Introdução

Este projeto estuda modelos matemáticos baseados em equações diferenciais, com ênfase em dois casos específicos: o modelo de competição de espécies de D'Ancona-Volterra (ou Lotka-Volterra) e um modelo voltado para o uso ótimo da luz amarela em semáforos, com o objetivo principal de realizar uma análise qualitativa e quantitativa dos modelos propostos, identificando seus comportamentos dinâmicos e propriedades fundamentais. Para tanto, foram explorados resultados fundamentais da teoria global de sistemas não lineares.

2 Desenvolvimento

Para analisarmos qualitativamente os modelos matemáticos, primeiro precisamos entender algumas definições e teoremas a respeito de sitemas não lineares e suas soluções.

Considere duas funções de classe C^r ($r \geq 2$): $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidas em um aberto U, com $\vec{0} = (0,0) \in U$ e $f(\vec{0}) = g(\vec{0}) = 0$. A partir delas, definimos o campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(U)$ como:

$$X(x,y) = \big(f(x,y), g(x,y)\big).$$

O sistema de equações diferenciais associado é:

$$\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

Uma solução do sistema é um par $(x(t), y(t))$, definido em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, que satisfaz as equações diferenciais. Geometricamente, essa solução define uma curva parametrizada $\phi(t) = (x(t), y(t))$, cujo traço representa a trajetória ou órbita do sistema.

Ao resolver a equação diferencial, encontramos uma curva integral para X, ou seja, uma curva $\phi(t)$ tal que:

$$X(\phi(t)) = \phi'(t).$$

Isso significa que o campo vetorial X é tangente à curva $\phi(t)$ em todos os pontos, ilustrando como as soluções do sistema seguem as direções definidas por X.

Estamos interessados na categoria de sistemas como (1) que admitem soluções periódicas, isto é, quando as funções $x(t)$, $y(t)$ são periódicas com mesmo período $T > 0$ (satisfazendo $x(0) = x(T)$ e $y(0) = y(T)$). Neste caso, a curva $\phi(t) = (x(t), y(t))$ é fechada $(\phi(0) = \phi(T))$.

Uma órbita periódica é uma trajetória fechada que não se reduz a um ponto. Formalmente:

- $\phi(t + T) = \phi(t)$ para algum $T > 0$;
- $\phi(t)$ não é um ponto fixo;
- T é o menor número positivo satisfazendo a condição.

Entre os métodos mais fortes para garantir a existência de órbitas periódicas em sistemas planares não-lineares destaca-se o Teorema de Poincaré-Bendixson. Este teorema estabelece condições suficientes para a existência de ciclos limites em sistemas bidimensionais. A versão clássica pode ser enunciada como:

Teorema 1 (Poincaré-Bendixson) *Seja* $\mathbf{f} \in C^1(E)$*, onde* $E \subseteq \mathbb{R}^2$ *é um aberto, e considere o sistema autônomo*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Suponha que exista uma trajetória Γ *contida em um compacto* $F \subset E$ *cujo conjunto* ω*-limite* $\omega(\Gamma)$ *satisfaça:*

1. $\omega(\Gamma)$ *não contém pontos críticos do sistema;*
2. $\omega(\Gamma)$ *é não-vazio.*

Então, $\omega(\Gamma)$ *é necessariamente uma órbita periódica do sistema.*

Exemplo 1 *Considere o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - 2y^2) \end{cases}$$

Seja $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$*. Derivando ao longo das soluções:*

$$\frac{dV}{dt} = x\dot{x} + y\dot{y} = y^2(1 - x^2 - 2y^2)$$

No exterior da região $R = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 < 1\}$*, temos* $\frac{dV}{dt} < 0$*, ou seja, as trajetórias entram em* R*. No interior,* $\frac{dV}{dt} > 0$*, ou seja, há uma região anelar positivamente invariante. Daí, o único ponto de equilíbrio é a origem* $(0, 0)$*. Pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, existe ao menos uma órbita periódica contida nessa região.*

O resultado a seguir mostra que em várias situações o sistema não admite órbitas periódicas.

Teorema 2 (Critério de Dulac) *Seja* $\mathbf{f} \in C^1(E)$*, onde* E *é uma região simplesmente conexa em* $\mathbb{R}^2$*. Se existe uma função* $B \in C^1(E)$ *(função de Dulac) tal que a divergência* $\nabla \cdot (B\mathbf{f})$*:*

1. *Não é identicamente nula,*

2. *Não muda de sinal em* E*,*

então o sistema não possui órbitas fechadas inteiramente contidas em E*.*

Além disso, se A *é uma região anular contida em* E *onde* $\nabla \cdot (B\mathbf{f})$ *não muda de sinal, então existe no máximo um ciclo limite em* A*.*

Exemplo 2 *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 \\ \dot{y} = x + y + y^3 \end{cases}$$

não possui soluções periódicas em $\mathbb{R}^2$*.*

Usando $B(x, y) = 1$*, a divergência é*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 + 1 > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Pelo Teorema de Dulac, o sistema não possui órbitas periódicas em $\mathbb{R}^2$*.*

3 Conclusões

Aplicação no Modelo de Volterra

As equações de Lotka-Volterra são pares de equações diferenciais não lineares de primeira ordem, frequentemente usadas para descrever a dinâmica de um sistema biológico em que duas espécies interagem, uma como predador e outra como presa. A população varia de acordo com o tempo de acordo com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \end{cases} \tag{2}$$

Este sistema modela interação presa-predador e possui órbitas periódicas fechadas ao redor de um ponto de equilíbrio, conforme garantido pelo Teorema de Poincaré-Bendixson. As figuras a seguir foram geradas utilizando o software *Mathematica*. A primeira evidencia a dinâmica cíclica entre presas e predadores. A segunda destaca a variação periódica das espécies ao longo do tempo.

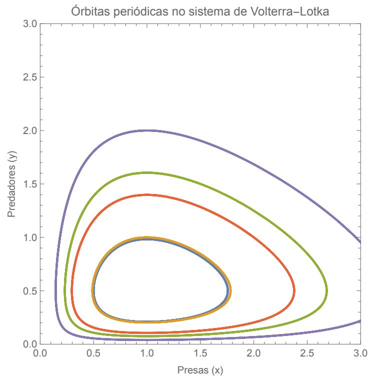

Figura 1: Órbitas Periódicas no sistema de Volterra-Lotka

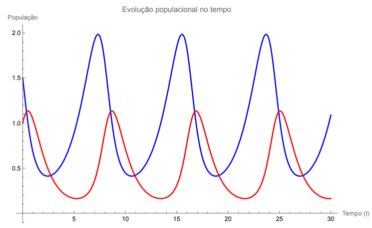

Figura 2: Evolução Populacional no

Referências

[1] D. G. de Figueiredo. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 12o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1979.

[2] Yu. Ilyashenko. *Centennial History of Hilbert's 16th problem*. Bulletin of the AMS 39, (2002) 301–354.

[3] S. Smale M. W. Hirsch. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, 1974.

[4] Donald A. Drew Martin Braun, Courtney S. Coleman. *Differential Equation Models*. Springer, 2012.

[5] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 2000.

[6] S. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, 1994.

[7] D. Zill. *Advanced Engineering Mathematics*. Jones Bartlett Learning, 2009.

[8] D. Zill. *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem*. Cengage Learning, 2016.