Martingais: Teoremas e aplicações

Palavras-Chave: Martingais, Convergência, Tempos de parada

Autores:

João Vitor Vieira de Castro, Departamento de Estatística – IMECC

Prof. Dr. Elcio Lebensztayn (orientador), Departamento de Estatística – IMECC

Introdução

O conceito de martingal relacionado a um contexto probabilístico surge durante o século XVIII, na França, como uma estratégia de aposta popular. Em um jogo de caráter simples – lançamento de uma moeda honesta, apostando se irá aparecer cara ou coroa – foi desenvolvida uma estratégia que, quase certamente, leva ao lucro do apostador.

Este termo aparece pela primeira vez na teoria de probabilidade em um trabalho do matemático francês Jean Ville (7), relacionado com o conceito de "sistema de jogo". O probabilista explicita que insere esse nome para relacionar à estratégia de aposta descrita anteriormente (4).

Objetivos do projeto de Iniciação Científica

- Estudar processos estocásticos com a propriedade martingal, assim como os resultados e teoremas fundamentais;
- Explorar diferentes exemplos de aplicações em áreas diversas da probabilidade.

Definições básicas

Uma filtragem com respeito ao processo $\{X_n\}$ é uma sequência crescente de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_n\}$, definidas por $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$. Cada termo da família de σ-álgebras é dito informação a tempo n.

Um processo estocástico $\{Y_n\}$ é dito martingal com respeito à filtragem $\{\mathcal{F}_n\}$ se, para quaisquer n e m com $m < n$,

1. $E|Y_n| < \infty$;
2. Y_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável;
3. $E(Y_n|\mathcal{F}_m) = Y_m$.

No item (3), se substituirmos a relação por $E(Y_n|\mathcal{F}_m) \leq Y_m$ ou $E(Y_n|\mathcal{F}_m) \geq Y_m$, temos, respectivamente, um supermartingal ou um submartingal. Um processo $\{Y_n\}$ é um martingal se,

e somente, $E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Y_n$, para todo n.

Resultados

Teorema da Parada Opcional

Um tempo de parada com respeito à filtragem $\{\mathcal{F}_n\}$ é uma variável aleatória T tomando valores sobre $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e satisfazendo a propriedade de que, para todo valor n em sua imagem, o evento $\{T = n\}$ é $\mathcal{F}_n$-mensurável.

Teorema 0.1. ***(Teorema da Parada Opcional)*** *Sejam $\{Y_n\}$ um supermatingal e T um tempo de parada, ambos relativos à filtragem $\{\mathcal{F}_n\}$. Então, afirma-se que*

$$E(Y_T) \leq E(Y_0)$$

se um dos seguintes itens é verdadeiro:

1. *Se $P(T < +\infty) = 1$ e existe uma variável aleatória $W \geq 0$ integrável satisfazendo $Y_{T\wedge n} > -W$, $\forall n \in \mathbb{N}$;*

2. ***(Incrementos limitados)*** *Se T é integrável (ou seja, $E(T) < \infty$) e existe $K < \infty$ tal que $E(|Y_{n+1} - Y_n|1_{\{T>n\}}|\mathcal{F}_n) \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, quase certamente.*

Corolário 0.1. ***(Amostragem Opcional)*** *Sejam $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ um martingal e T um tempo de parada, ambos relativos à filtragem $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$. Sob as hipóteses $P(T < \infty) = 1$, $E|Y_T| < \infty$ e $\lim_{n\to\infty} E(Y_n 1_{\{T>n\}}) = 0$, temos que $E(Y_T) = E(Y_0)$.*

Convergência de Martingais

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ neste espaço é dita **uniformemente integrável** se

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n E(|X_n|1_{\{|X_n|\geq a\}}) = 0.$$

Teorema 0.2. ***(Convergência de Martingais)*** *Seja $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ um submartingal com respeito à filtragem $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ satisfazendo $E(Y_n^+) \leq M$ para algum $M > 0$ e todo n (ou seja, é limitado superiormente: $\sup_{n\geq 0} E(Y_n^+) < \infty$). Então, existe uma variável aleatória Y_∞ tal que $Y_n \xrightarrow{q.c.} Y_\infty$ quando $n \to \infty$. Além disso,*

1. *Se $E|Y_0| < \infty$, então Y_∞ é integrável: $E(Y_\infty) < \infty$;*

2. *Se a sequência $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ é uniformemente integrável, então também temos a convergência em média: $E(|Y_n - Y_\infty|) \to 0$. Em particular, se $\{Y_n\}$ é um martingal, então $E(Y_\infty) = E(Y_n)$ para todo n.*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ um martingal com respeito à filtragem $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$. Ele é dito **regular** se existe uma variável aleatória Z integrável em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $Y_n = E(Z|\mathcal{F}_n)$, para todo $n \geq 0$.

Teorema 0.3. *Seja $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ um martingal com respeito à filtragem $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *$\{Y_n\}$ é uniformemente integrável;*

2. *$\{Y_n\}$ converge quase certamente e em média para uma variável Y_∞;*

3. *$\{Y_n\}$ é regular.*

Convergência em L^p

Teorema 0.4. ***(Convergência em L^p)*** *Seja $\{Y_n\}$ um submartingal com respeito à filtragem $\{\mathcal{F}_n\}$. São equivalentes as seguintes afirmações.*

1. *$\{Y_n\}$ é limitado em L^p, ou seja, $E(|Y_n|^p) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*

2. *$\{Y_n\}$ é uniformemente integrável e $Y_\infty \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde Y_∞ é a variável para a qual as Y_n convergem quase certamente e em média;*

3. $Y^* := \sup_{n\in\mathbb{N}} |Y_n| \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Se cada uma das afirmações é válida, então $Y_n \to Y_\infty$ quase certamente e em L^p.

Conclusão

Martingais mostram-se como uma ferramenta útil para analisar processos estocásticos. A construção de famílias de variáveis aleatórias com a propriedade martingal permite a aplicação de diversos resultados. Podemos entender o comportamento de um tempo de parada com respeito a uma filtragem, além de propriedades ligadas a sua distribuição e a seus momentos. Além disso, sob hipóteses de integrabilidade uniforme ou de regularidade, mostramos a convergência em média de um martingal para uma variável aleatória integrável. As aplicações são variadas, abrangendo teoremas clássicos da probabilidade, processos markovianos e resultados inferenciais e estatísticos.

Referências

[1] R. Durrett. *Probability: Theory and examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 2019.

[2] N. Lanchier. *Stochastic modeling*. Springer, 2017.

[3] G. F. Lawler. *Introduction to stochastic processes*. Chapman & Hall/CRC, 2006.

[4] R. Mansuy. The origins of the word “martingale”. *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, 2009.

[5] G. R. Grimmett; D. R. Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford University Press, 2020.

[6] S. Karlin; H. M. Taylor. *A first course in stochastic processes*. Academic Press, 1977.

[7] J. Ville. *Étude critique de la notion de collectif*. Thèses de l’entre-deux-guerres, 1939.