



Conceitos fundamentais em dinâmica discreta

Palavras-Chave: dinâmica hiperbólica; “Cat Map”; transitividade topológica

Autores:

Ana Paula Schramm Steuernagel, IMECC - Unicamp
Prof. Dr. Régis Varão (orientador), IMECC - Unicamp

Introdução

A dinâmica discreta, um ramo da teoria dos sistemas dinâmicos, estuda a evolução de um fenômeno ao longo do tempo em intervalos discretos, bem como suas propriedades locais e globais, ou seja, analisam-se as variações decorrentes de iterações sucessivas de um mapa.

O objetivo principal da pesquisa foi compreender automorfismos lineares hiperbólicos no toro, sobretudo por meio do estudo do mapa conhecido como “Cat Map”. Em vista disso, o estudo de sistemas dinâmicos discretos mais simples e conceitos essenciais de espaços métricos fundamentaram a pesquisa. Além disso, certas propriedades como, por exemplo, a transitividade topológica e a sua equivalência com a existência de uma órbita densa, foram demonstradas para o caso mais geral, e não apenas para o “Cat Map”.

Metodologia

A metodologia desse projeto consistiu na apresentação de seminários para o orientador, a fim de discutir o andamento dos estudos. Tais reuniões possibilitaram a exposição dos tópicos estudados, bem como a indicação, por parte do professor, de como proceder os estudos. Ademais, a cada semana, o professor orientador indicava um resultado a ser demonstrado pela aluna até a próxima reunião, incentivando, dessa forma, a autonomia em desenvolver as próprias demonstrações.

Discussão

Primeiramente, definiu-se relação binária e classe de equivalência com o propósito de definir o círculo topológico, como abaixo.

Definição 1. O círculo topológico $\mathbb{S}^1$ é o conjunto de todas as classes de equivalência induzidas em $\mathbb{R}$ por $\sim$. Isto é,

$$\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim = \{[x] \subset \mathbb{R} | x \in \mathbb{R}\}.$$

Note que, em relação ao círculo topológico, tem-se uma relação binária de equivalência B em $\mathbb{R}$ tal que, dados $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x, y) \in B \iff x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Um conceito essencial para prosseguir os estudos foi a noção de órbita e, a partir disso, a compreensão das órbitas periódicas.

Definição 2. Dada uma função bijetora $f : M \rightarrow M$ que define uma dinâmica, a órbita de x pelo mapa f é dada por

$$Orb_f(x) = \{\dots, f^{-2}, f^{-1}, x, f^1, f^2, \dots\} = \{f^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$$

Definição 3. A órbita de um ponto $x \in M$ é periódica pelo mapa $f : M \rightarrow M$ se

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f^n(x) = x.$$

A primeira dinâmica estudada foi a rotação no círculo que é o mapa R_θ dado por

$$R_\theta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, [x] \mapsto [x + \theta], \theta \in \mathbb{R}.$$

A respeito desse mapa, foram demonstrados os seguintes resultados:

Proposição 1. Se $\theta \in \mathbb{Q}$, então todo ponto $x \in \mathbb{S}^1$ tem órbita periódica pelo mapa R_θ . Nesse caso, denomina-se R_θ de uma rotação racional.

Proposição 2. Se $\theta \notin \mathbb{Q}$, então o mapa R_θ não tem pontos periódicos. Nesse caso, denomina-se R_θ de uma rotação irracional.

Teorema 3. A órbita de um ponto de $\mathbb{S}^1$ é densa sob rotação irracional.

Definição 4. A métrica usual d no espaço métrico $\mathbb{S}^1$ é dada por

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, |x + 1 - y|\}.$$

Definição 5. Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \rightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também é contínua.

Após ser definido homeomorfismos entre espaços métricos, foi demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 4. Considere $\mathbb{S}^1$ e $S_g^1 = \partial B(0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Então, existe um homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ sobre S_g^1 dado por

$$\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow S_g^1, [\theta] \mapsto e^{2\pi i \theta}.$$

Denota-se por toro plano, $\mathbb{T}^2$, o produto cartesiano do círculo topológico com ele mesmo, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. A partir disso, pode-se definir uma nova dinâmica dada pelo mapa

$$R_{(\theta_1, \theta_2)} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, (x, y) \mapsto (x + \theta_1, y + \theta_2).$$

A respeito dessa dinâmica, foi analisada a existência de pontos periódicos e de órbitas densas para os seguintes casos:

- (i) θ_1 e θ_2 racionais;

- (ii) θ_1 racional e θ_2 irracional;
- (iii) θ_1 e θ_2 irracionais.

Proposição 5. Se todas as órbitas são periódicas pelo mapa $R_{(\theta_1, \theta_2)}$, então não há órbitas densas.

Com essa teoria bem fundamentada, pode-se definir automorfismos hiperbólicos no toro.

Definição 6. Um automorfismo no toro é um mapa invertível $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Cada T é da forma $T_A(x) = Ax \pmod{1}$, onde a matriz A satisfaz as seguintes condições:

- (i) A é uma matriz com entradas inteiras tal que $\det(A) = \pm 1$;
- (ii) Se o módulo dos autovalores é diferente de 1, então o automorfismo no toro é chamado de hiperbólico, implicando em comportamento dinâmico expansivo/contrativo nas direções dos autovetores associados.

Definição 7. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Então, o “Cat Map” é a dinâmica dada por

$$L_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, [(x, y)] \mapsto [A(x, y)^t]$$

A respeito dessa dinâmica, foi provado a sua inversibilidade.

Dado um mapa que define a projeção do plano para o toro plano, isto é,

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, (x, y) \mapsto [(x, y)],$$

pode-se enunciar o seguinte resultado.

Teorema 6. Seja v^u um autovetor da matriz A . Então, tem-se que $P(\langle v^u \rangle)$ é denso no toro plano, $\mathbb{T}^2$.

A seguir, foi demonstrada a transitividade topológica do “Cat Map”.

Teorema 7. Dado duas bolas abertas $u, v \in \mathbb{T}^2$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L_A^{(n)}(u) \cap v \neq \emptyset$, i.e., L_A é topologicamente transitivo.

Teorema 8 (Transitividade de Birkhoff). Seja f um mapa contínuo em um espaço métrico completo e separável X sem pontos isolados. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é topologicamente transitivo.
- (ii) Existe $x \in X$ tal que a $orb(x, f)$ é densa em X .

Conclusão

Este projeto possibilitou o contato da orientanda com a área de pesquisa de Sistemas Dinâmicos Discretos. Apesar de o foco de estudo ser o “Cat Map”, foram pesquisadas diversas outras dinâmicas, as quais fundamentaram a compreensão de teoremas mais gerais. Ressalta-se que foram pesquisados todos os assuntos planejados para o primeiro semestre de Iniciação Científica, correspondente a vigência do projeto.

Referências

- [1] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.
- [2] Karl-G. Grosse-Erdmann and Alfredo Peris Manguillot. *Linear chaos*. Universitext. Springer, London, 2011.
- [3] Elon Lages. *Espaços Métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.