Uma introdução à dinâmica de operadores lineares

Palavras-Chave: dinâmica de operadores lineares; dinâmica caótica; análise funcional

Autores:
Júlia Oliveira Miranda, IMECC - Unicamp
Prof. Dr. Régis Varão (orientador), IMECC - Unicamp

Introdução

Por meio do estudo preliminar do *endomorfismo expansor do círculo pelo fator* 2 e do *shift de Bernoulli*, foi adquirida familiaridade com conceitos fundamentais da Dinâmica Linear e com o *círculo topológico* e o espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Com essa base, foi dado início ao estudo mais detalhado de resultados relacionados à *transitividade frequente*, apoiado por conceitos de espaços métricos ([3]). No presente trabalho, é apresentada uma interessante construção de um ponto cuja órbita sob o shift visita, com frequência positiva, todo conjunto aberto do espaço. A seguir, foi estudado um *operador de Rolewicz* no espaço ℓ^1, tendo sido demonstradas algumas de suas propriedades dinâmicas relacionadas à caoticidade.

Metodologia

Os estudos foram motivados e desenvolvidos a partir de discussões entre a aluna e o orientador, a princípio sem dependência de bibliografia. Ao longo do semestre, foram realizados encontros presenciais semanais nas dependências da Unicamp, durante os quais o professor expunha conceitos fundamentais e propunha situações problema à orientanda. À medida em que foi adquirida maior familiaridade da aluna com o assunto, introduziu-se, como apoio aos estudos, as referências [1] e [2].

Discussão

Definição 1. O *círculo topológico* $\mathbb{S}^1$ corresponde ao conjunto dos números reais quocientado pelos inteiros, i.e.,

$$\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Proposição 1. A função

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \min\{|x - y|,\, 1 - |x - y|\} \end{aligned}$$

define uma métrica em $\mathbb{S}^1$.

Definição 2. O *espaço de sequências nos símbolos* 0 *e* 1 é definido como

$$\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots = \{(a_0, a_1, \dots) |\, a_i \in \{0,1\}\},$$

ou seja, Σ_2 é o conjunto de todas as sequências infinitas cujas entradas são apenas os dígitos 0 e 1. Representaremos como (a_n) uma sequência do tipo $(a_0, a_1, \dots)$.

Proposição 2. A função

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\Sigma} : \Sigma_2 \times \Sigma_2 &\to \mathbb{R} \\ ((a_n), (b_n)) &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \end{aligned}$$

define uma métrica em Σ_2.

Definição 3. O espaço ℓ^1 é dado por

$$\ell^1 := \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\},$$

ou seja, é o espaço de sequências infinitas com entradas reais cujas séries são absolutamente convergentes. Nesse espaço, definimos a soma de duas sequências por

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n).$$

Proposição 3. Pode-se definir a norma

$$\|(x_n)\|_1 := \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|,$$

e portanto ℓ^1 é um espaço métrico com a métrica induzida

$$\mathrm{d}_1(x, y) = \|x - y\|_1.$$

Os conceitos e resultados seguintes se referem a um espaço métrico $X \in \{\mathbb{S}^1, \Sigma_2, \ell^1\}$, completo e separável.

Definição 4. Diz-se que $f : X \to X$ é um mapa *topologicamente transitivo* quando, para todo par U, V de subconjuntos abertos de X,

$$\exists\, n \in \mathbb{N}_{\neq 0} \text{ tal que } f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

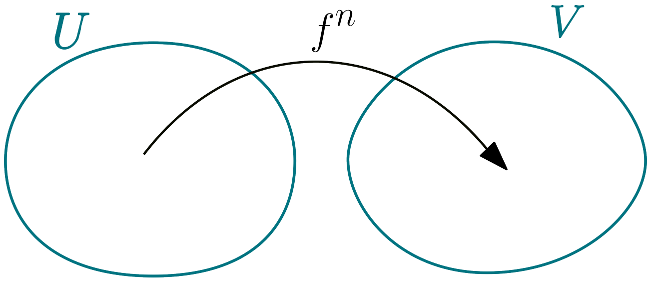

Figura 1: Transitividade topológica.

Definição 5. Diz-se que $f : X \to X$ é um mapa *hipercíclico* quando

$$\exists\, x_0 \in X \text{ cuja órbita é densa em } X.$$

Teorema 4. [Transitividade de Birkhoff] Um mapa contínuo $f : X \to X$ é topologicamente transitivo se, e somente se, é hipercíclico. Nesse caso, o conjunto $D(f)$ de todos os pontos de X com órbita densa sob f é denso G_δ.

Definição 6. Sejam $f : X \to X$, $x_0 \in X$ e uma bola aberta $B_\varepsilon(a)$. Então, a *densidade inferior* de $O_f(x_0)$ em $B_\varepsilon(a)$ é definida como

$$\underline{\mathrm{Den}}(O_f(x_0),\, B_\varepsilon(a)) \coloneqq \liminf_{n\to\infty} \frac{\#\{i \mid f^i(x_0) \in B_\varepsilon(a),\, 0 \le i \le n-1\}}{n}.$$

Quando $\underline{\mathrm{Den}}(O_f(x_0),\, B_\varepsilon(a)) > 0$, diz-se que "$x_0$ visita $B_\varepsilon(a)$ com *frequência positiva* sob f". Diz-se que f é *frequentemente transitivo* quando $\exists\, x_0 \in X$ tal que x_0 visita todo aberto com frequência positiva sob f.

Definição 7. Uma função $f : X \to X$ tem *dependência sensível às condições iniciais* quando $\exists\, \delta \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ tal que $\forall\, a \in X$ e $\forall\, B_r(a)$ tem-se que

$$\exists\, b \in B_r(a) \text{ e } \exists\, n \ge 0 \text{ tal que } \mathrm{d}(f^n(a),\, f^n(b)) > \delta.$$

Ou seja, quando sempre houver sequências arbitrariamente próximas de a que ficarão a uma distância maior que δ dos iterados de a após algum número de iterações de f, qualquer que seja a.

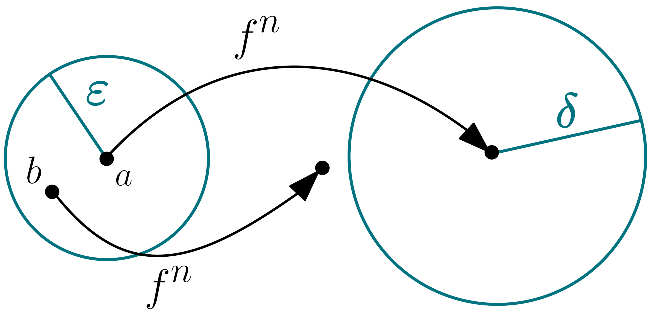

Figura 2: Dependência sensível às condições iniciais.

Definição 8. Diz-se que uma função $f : X \to X$ é *caótica no sentido de Devaney* quando

(i) $\mathrm{Per}(f)$ é um conjunto denso em X;

(ii) é hipercíclica, e

(iii) tem dependência sensível às condições iniciais.

Definição 9. O *shift de Bernoulli* é o mapa σ dado por

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma_2 &\to \Sigma_2 \\ (a_1, a_2, \dots) &\mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots). \end{aligned}$$

Teorema 5. O shift de Bernoulli σ é caótico.

Teorema 6. Existem subconjuntos de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, digamos $A(l, \nu)$, com $l, \nu \geq 1$, que são disjuntos dois a dois, têm densidade inferior positiva e satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $n \in A(j, \lambda) \Rightarrow n \geq \lambda$, e

(ii) $n \in A(j, \lambda)$, $m \in A(k, \mu)$, com $n \neq m \Rightarrow |n - m| \geq \lambda + \mu$.

O Teorema 6 nos permite construir uma sequência em Σ_2 que visita com frequência positiva sob σ todas as bolas abertas do espaço.

Teorema 7. O shift de Bernoulli σ é frequentemente transitivo.

Definição 10. O *endomorfismo expansor do círculo (pelo fator* 2*)* é o mapa f_2 dado por

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto 2x. \end{aligned}$$

Teorema 8. O endomorfismo expansor f_2 é caótico e frequentemente transitivo.

Definição 11. Dado um escalar α, o *operador de Rolewicz* associado, em ℓ^1, é o mapa

$$\begin{aligned} \alpha\sigma = w_\alpha : \ell^1 &\to \ell^1 \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) &\mapsto (\alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \dots). \end{aligned}$$

Definição 12. O operador de Rolewicz associado a 2 em ℓ^1, ou o *shift com peso* 2, é o mapa

$$\begin{aligned} w_2 : \ell^1 &\to \ell^1 \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) &\mapsto (2x_2, 2x_3, 2x_4, \dots). \end{aligned}$$

Proposição 9. $\mathrm{Per}(w_2)$ é denso em ℓ^1.

Proposição 10. w_2 é topologicamente transitivo.

Conclusão

Em conformidade com o previsto, foram estudados o shift de Bernoulli, o endomorfismo expansor e um dos operadores de Rolewicz. O trabalho foi proveitoso para o desenvolvimento matemático da aluna, proporcionando contato real com a metodologia de pesquisa da área.

Referências

[1] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems.* Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.

[2] Karl-G. Grosse-Erdmann and Alfredo Peris Manguillot. *Linear chaos.* Universitext. Springer, London, 2011.

[3] Elon Lages. *Espaços Métricos.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.