Estudo da Estabilidade de Integradores Numéricos para Solução de Equações Diferenciais Ordinárias

Palavras-Chave: Integração Numérica, Métodos Numéricos, Estabilidade

Murilo Barros Scalari, FEM - UNICAMP
Prof. Dr. Thales Freitas Peixoto, FEM - UNICAMP

1 Introdução

Na engenharia, muitos sistemas mecânicos são modelados por equações diferenciais, que podem ou não ter solução analítica. Quando não há, recorre-se a métodos numéricos de integração para obter respostas aproximadas. Esses métodos, no entanto, introduzem erros e fornecem resultados apenas em pontos discretos, resultando muitas vezes em respostas distantes da realidade.

Diante disso, torna-se essencial compreender propriedades como estabilidade, alongamento de período e decaimento de amplitude. Este trabalho investiga essas características em diferentes métodos de integração aplicados à equação de movimento de um sistema linear sem amortecimento, buscando identificar as técnicas mais adequadas para aplicações em engenharia.

Metodologia

1.1 Sistema modelo

O sistema modelo que será considerado na análise a seguir é um sistema simples em vibração livre com um grau de liberdade, cuja equação é:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1}$$

onde ω_n é a frequência natural e ξ é o fator de amortecimento do sistema. Sua representação no espaço de estados é dada por:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{2}$$

com:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

A solução analítica deste sistema, para $0 < \xi < 1$, é:

$$x(t) = Ce^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) \tag{4}$$

com $C = \frac{\sqrt{(v_0+\xi\omega_n x_0)^2+(x_0\omega_d)^2}}{\omega_d}$ e $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_d}{v_0+\xi\omega_n x_0}\right)$, sendo $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$.

1.2 Integradores

Ao todo, foram utilizados 9 integradores neste trabalho, e a análise foi divida em duas partes. A primeira a tratar dos métodos do tipo Runge-Kutta, de 1ª à 4ª ordem, a segunda tratando de métodos diretos, mais especificamente os métodos de Diferenças Centrais, Houbolt, Newmark, Bathe e Wilson-θ.

1.3 Operador de aproximação

Para um método de integração, podemos estabelecer a seguinte relação recursiva (Bathe, 2014):

$${}^{t+h}\mathbf{y} = \hat{\mathbf{A}}\ {}^{t}\mathbf{y} + \mathbf{L}({}^{t+h}\mathbf{r}) \tag{5}$$

Sendo:

- $\hat{\mathbf{A}} \rightarrow$ o operador de aproximação do integrador.
- $\mathbf{L}({}^{t+h}\mathbf{r})$ o operador de carga do integrador.

Cada quantidade na equação (5) depende do integrador em específico que está sendo aplicado. Essa equação pode ser usada para calcular a solução em qualquer $t + nh$ que for necessário. Para o caso abordado neste trabalho, o operador de carga é nulo.

1.4 Solução da equação de diferenças

Resolver a equação de diferenças permite descrever explicitamente a evolução da resposta numérica ao longo do tempo, possibilitando quantificar as propriedades de aproximação introduzidas pelo método de integração. Para sistemas iterativos lineares da forma $\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{T}\mathbf{y}^k$, onde $\mathbf{T}$ é uma matriz completa, a solução geral é (Olver and Shakiban, 2018):

$$\mathbf{y}^k = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n \tag{6}$$

onde $\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n$ são os autovetores de $\mathbf{T}$, $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ seus autovalores, e $c_1 \cdots c_n$ são coeficientes definidos pelas condições iniciais. Realizando o desenvolvimento, encontramos que a solução geral para a equação em diferenças dos métodos do tipo Runge-Kutta pode ser expressa, considerando os autovalores em forma polar, como:

$${}^k\mathbf{y} = C_3\rho^k\cos(k\theta - \phi) \tag{7}$$

onde ρ é o módulo do autovalor, θ seu argumento, e C_3, ϕ são constantes determinadas pelas condições iniciais.

1.5 Estabilidade

Uma maneira de analisar o desempenho de um método de integração numérica é examinando as características do seu operador de aproximação da integração, o qual representa o efeito do método ao longo do tempo. Como o processo de integração é completamente descrito pela matriz $\hat{\mathbf{A}}$, estudar esse operador equivale a avaliar o método em si. Uma técnica eficaz para isso é a decomposição espectral, que mostra como cada modo da solução se desenvolve a partir dos autovalores de $\hat{\mathbf{A}}$.

A decomposição espectral de $\hat{\mathbf{A}}$ pode ser expressa como $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$, em que $\mathbf{P}$ é a matriz formada pelos autovetores de $\hat{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{J}$ corresponde à forma canônica de Jordan, contendo os autovalores na diagonal. Avançar n passos temporais na solução equivale a calcular $\hat{\mathbf{A}}^n = \mathbf{P}\mathbf{J}^n\mathbf{P}^{-1}$, ou seja, elevar cada autovalor λ_i do operador de aproximação da integração à potência n. Dessa forma, se algum autovalor tiver módulo maior que 1, ocorrerá crescimento não controlado na resposta numérica gerada pelo método. Definindo o raio espectral de $\hat{\mathbf{A}}$ como:

$$\rho(\hat{\mathbf{A}}) = \max_{i=1,2,\ldots} |\lambda_i| \tag{8}$$

o critério para estabilidade é o seguinte:

- Quando todos os autovalores forem distintos, a estabilidade numérica exige que $\rho(\hat{\mathbf{A}}) \leq 1$.
- Caso existam autovalores repetidos, todos devem possuir valor absoluto menor ou igual a 1.

1.6 Alongamento de período (PE) e Decaimento de amplitude (AD)

Para avaliar a precisão de métodos de integração no tempo, é comum analisar seu impacto no período e na amplitude da resposta numérica, quantificados como alongamento de período e decaimento de amplitude. Esses efeitos estão associados à dispersão e dissipação numéricas introduzidas pelo método. Embora inicialmente tratados de forma qualitativa, definições rigorosas e procedimentos sistemáticos foram consolidados posteriormente, como discutido por Noh and Bathe (2018). Neste trabalho, adota-se o conceito de amortecimento numérico, introduzido artificialmente pela formulação do integrador.

A análise é conduzida separando os casos com e sem amortecimento físico. No caso não amortecido, toda a dissipação observada decorre da integração numérica, sendo calculado o erro percentual da resposta em relação à solução analítica exata. Já para sistemas amortecidos, busca-se isolar o efeito do método numérico a partir da razão entre as respostas numérica e analítica. Essa avaliação é feita de forma diferenciada para métodos de Runge-Kutta e métodos diretos.

1.6.1 Sistema sem amortecimento físico

A solução numérica exata de um esquema de integração temporal para um sistema de um grau de liberdade não amortecido ($\xi = 0$) pode ser escrita como (Noh and Bathe, 2018):

$${}^{nh}\mathbf{X} = e^{-\overline{\xi}\Omega_n n}\left(\overline{\mathbf{c}}_1\cos(\overline{\Omega}_d n) + \overline{\mathbf{c}}_2(\overline{\Omega}_d n)\right) \tag{9}$$

em que $\overline{\Omega}_d = \overline{\omega}_d h$, sendo $\overline{\omega}_d$ a frequência natural amortecida numérica (que incorpora o amortecimento numérico), com $\overline{\omega}_d = \omega_n \sqrt{1-\overline{\xi}^2}$. O fator de amortecimento numérico é dado por $\overline{\xi} = -\frac{1}{\Omega_n}\ln(\rho(\hat{\mathbf{A}}))$, com $\Omega_n = \omega_n h$. Os autovalores, nesse caso, são: $\lambda_{1,2} = \pm j\overline{\Omega}_d$. Os parâmetros $\overline{\mathbf{c}}_1$ e $\overline{\mathbf{c}}_2$ são dados por $\overline{\mathbf{c}}_1 = \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{c}}_1 + \hat{\mathbf{c}}_2)$ e $\overline{\mathbf{c}}_2 = \mathrm{Re}(j(\hat{\mathbf{c}}_1 - \hat{\mathbf{c}}_2))$, onde $\hat{\mathbf{c}}_i = \boldsymbol{\psi}_i z_i$ e $[z_1 \ z_2]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{\psi}_1 \ \boldsymbol{\psi}_2]^{-1}\mathbf{X}_0$, sendo $\boldsymbol{\psi}_i$ os autovetores e $\mathbf{X}_0$ as condições iniciais. Assim, o alongamento do período (PE) é definido conforme (Noh and Bathe, 2018):

$$\mathrm{PE} = \frac{\overline{T}_d - T_n}{T_n} = \frac{\Omega_n}{\overline{\Omega}_d} - 1 \tag{10}$$

em que $\overline{T}_d$ representa o período amortecido obtido numericamente, e T_n é o período do sistema físico.

Se considerarmos o valor da Eq. [9] no instante $n = \overline{T}_d$, podemos obter uma expressão para o decaimento da amplitude (AD) com base no termo exponencial de amortecimento presente na solução, que é dado por:

$$\mathrm{AD} = 1 - \exp\left(-2\pi\overline{\xi}\frac{\Omega_n}{\overline{\Omega}_d}\right) \tag{11}$$

1.6.2 Sistema com amortecimento físico

1.6.2.1 Métodos de Runge-Kutta A partir da solução na Eq. [7], é evidente que o período está relacionado ao argumento da função cosseno. Considerando que $k = \frac{t}{h}$, e que, ao completar um ciclo completo, o argumento do cosseno aumenta em 2π, tem-se:

$$\frac{\theta(t+\overline{T}_d)}{h} - \phi = \frac{\theta t}{h} - \phi + 2\pi \tag{12}$$

Assim, obtém-se uma expressão para o período amortecido numérico nos casos em que há amortecimento físico no sistema como sendo $\overline{T}_d = \dfrac{2\pi h}{\theta}$. A partir dela, infere-se o alongamento do período para esse caso:

$$\mathrm{PE} = \frac{\overline{T}_d}{T_d} \tag{13}$$

em que T_d representa o período do sistema físico com amortecimento ($\xi \neq 0$). Dessa forma, o decaimento da amplitude é definido como a razão entre os termos que governam o decaimento tanto da solução numérica (Eq. 7, ρ^k quando $k = \overline{T}_d/h$, isto é, um período da solução numérica) quanto da solução analítica (Eq. 4):

$$\mathrm{AD} = \frac{\rho^{\frac{\overline{T}_d}{h}}}{e^{-\xi\omega_n T_d}} \tag{14}$$

1.6.2.2 Métodos diretos A análise é semelhante para os métodos diretos, porém conduzida de forma diferente. O alongamento de período é dado por:

$$\mathrm{PE} = \frac{\Omega_d}{\angle(\lambda)} \tag{15}$$

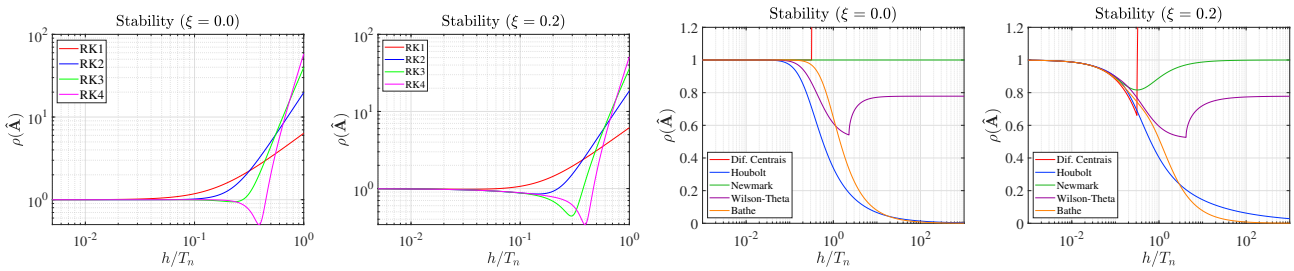
Neste caso, comparamos a frequência amortecida (inverso do período) do sistema ($\Omega_d = \omega_d h$) com a frequência da resposta numérica. Avaliamos a frequência numérica por meio da fase $\angle(\lambda)$ do autovalor dominante do operador de aproximação do método (o mesmo usado no cálculo do raio espectral). Para o decaimento de amplitude:

$$\mathrm{AD} = \frac{\exp\left(-2\pi\overline{\xi}\dfrac{\Omega_n}{\angle(\lambda)}\right)}{\exp\left(-\xi\omega_n T_d\right)} \tag{16}$$

que representa uma razão entre o decaimento da solução numérica, representado pela exponencial negativa da Eq. (9) avaliada em $n = \overline{T}_d$, e o decaimento da solução analítica.

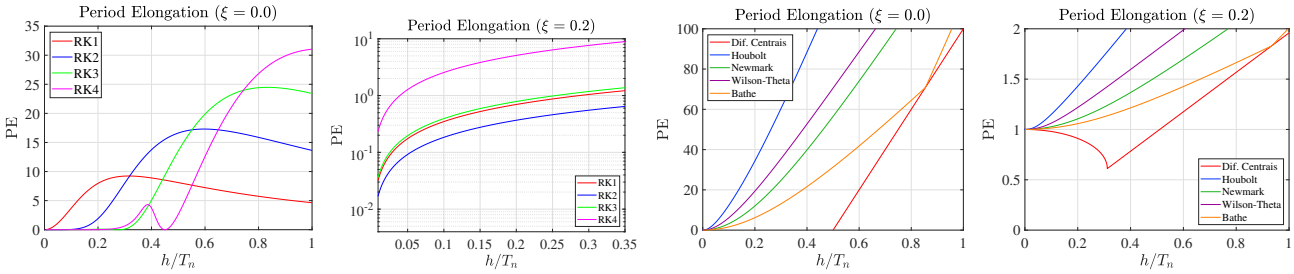
2 Resultados

Variando as propriedades em função do passo de tempo normalizado, obtemos as curvas apresentadas a seguir. A Fig. [1] apresenta as curvas obtidas para o raio espectral, a Fig. [2] contém os resultados quanto ao alongamento de período dos métodos, a Fig. [3] o decaimento de amplitude, e por fim, a Fig. [4] mostra a posição dos autovalores dominantes dos métodos no plano complexo, cada ponto na curva representa o valor das partes real e imaginária do autovalor dominante para um valor específico de passo de tempo. As curvas iniciam com $h = 0$ no ponto $Re(\lambda) = 1, Im(\lambda) = 0$ e caminham no sentido anti-horário conforme cresce o passo de tempo.



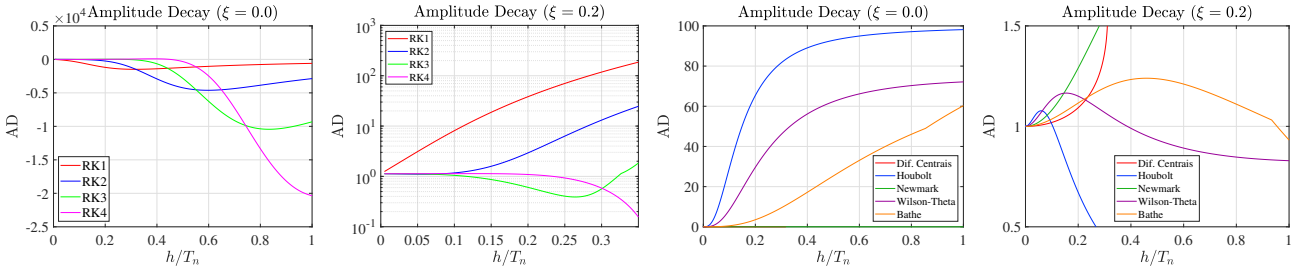
(a) Métodos Runge-Kutta com $\xi = 0$ (b) Métodos Runge-Kutta com $\xi = 0.2$ (c) Métodos diretos com $\xi = 0$ (d) Métodos diretos com $\xi = 0.2$

Figura 1: Raio espectral dos métodos em função do passo de tempo normalizado pelo período natural do sistema, com ω_n = 0.314 rad/s.



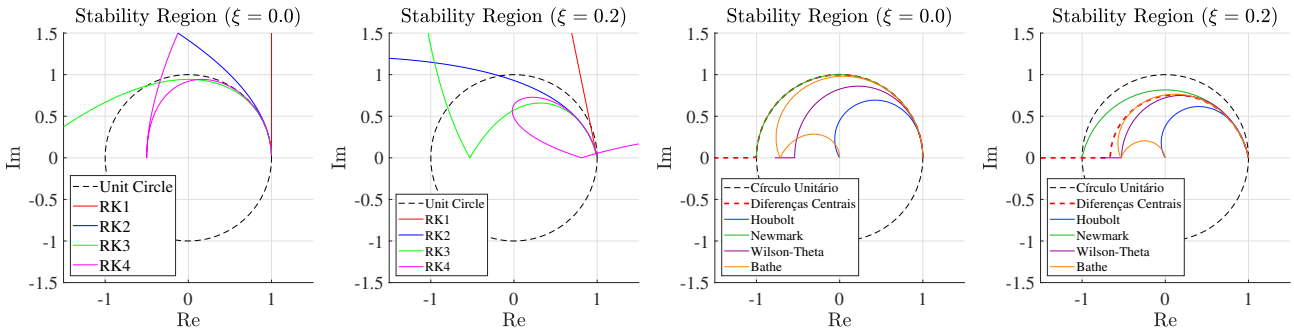
(a) Métodos Runge-Kutta com $\xi = 0$ (b) Métodos Runge-Kutta com $\xi = 0.2$ (c) Métodos diretos com $\xi = 0$ (d) Métodos diretos com $\xi = 0.2$

Figura 2: Alongamento de período dos métodos em função do passo de tempo normalizado pelo período natural do sistema, com ω_n = 0.314 rad/s.



(a) Métodos Runge-Kutta com $\xi = 0$ (b) Métodos Runge-Kutta com $\xi = 0.2$ (c) Métodos diretos com $\xi = 0$ (d) Métodos diretos com $\xi = 0.2$

Figura 3: Decaimento de amplitude dos métodos em função do passo de tempo normalizado pelo período natural do sistema, com ω_n = 0.314 rad/s.



(a) Métodos Runge-Kutta com $\xi = 0$ (b) Métodos Runge-Kutta com $\xi = 0.2$ (c) Métodos diretos com $\xi = 0$ (d) Métodos diretos com $\xi = 0.2$

Figura 4: Posição do autovalor dominante no plano complexo variando o passo de tempo normalizado pelo período natural do sistema, com ω_n = 0.314 rad/s.

3 Conclusões

Este trabalho analisou em profundidade o comportamento numérico de diversos métodos de integração aplicados a sistemas dinâmicos, com ênfase em suas propriedades de estabilidade, alongamento de período (PE) e decaimento de amplitude (AD). A investigação considerou tanto métodos diretos quanto métodos da família de Runge-Kutta, avaliando como a presença ou ausência de amortecimento físico afeta as respostas obtidas. Os resultados revelam diferenças marcantes entre as abordagens, destacando aspectos importantes que devem ser considerados na escolha do integrador.

No que se refere à estabilidade, todos os métodos diretos analisados, com exceção do método das Diferenças Centrais, se mostraram incondicionalmente estáveis, o que foi verificado pela posição dos autovalores no plano complexo. A presença de amortecimento físico reduziu o raio espectral da maioria dos métodos diretos, com exceção do método de Houbolt, cujo raio aumentou com o amortecimento. Já entre os métodos de Runge-Kutta, os de 1ª e 2ª ordem demonstraram-se incondicionalmente instáveis na ausência de amortecimento físico. No entanto, a introdução de amortecimento, em certos casos, foi capaz de suprimir a instabilidade e conferir alguma margem de estabilidade.

Quanto ao alongamento de período, o método das Diferenças Centrais foi o único entre os métodos diretos a apresentar encurtamento de período mesmo na ausência de amortecimento físico. Entre os métodos de Runge-Kutta, observou-se que o de 4ª ordem apresentou o maior alongamento de período, efeito diretamente associado ao seu maior amortecimento numérico.

Em relação ao decaimento de amplitude, o método de Newmark se destacou por não introduzir AD quando o sistema não possui amortecimento físico. Já com amortecimento presente, o método de Bathe demonstrou crescimento de amplitude, porém de forma estável, sem levar à instabilidade numérica. No contexto dos métodos de Runge-Kutta, o maior amortecimento numérico da 4ª ordem também resultou em maior AD, enquanto os métodos de 1ª e 2ª ordem apresentaram crescimento instável da amplitude quando o sistema era não amortecido.

Em suma, os resultados evidenciam que a escolha do método de integração deve ser pautada não apenas pela ordem formal de precisão, mas também pela análise crítica das propriedades numéricas que afetam diretamente a fidelidade da simulação. A presença de amortecimento físico exerce papel relevante, podendo inclusive alterar o regime de estabilidade de métodos instáveis. Com base nos dados obtidos, fica evidente que cada método possui vantagens e limitações específicas, sendo necessário considerar o equilíbrio entre estabilidade, alongamento de período e decaimento de amplitude ao selecionar a estratégia numérica mais adequada.

Referências

Bathe, K.J., 2014. *Finite Element Procedures*. Pearson, United States, 2nd edition.

Noh, G. and Bathe, K.J., 2018. "Further insights into an implicit time integration scheme for structural dynamics". *Computers & Structures*, Vol. 206, pp. 40–56.

Olver, P.J. and Shakiban, C., 2018. *Applied Linear Algebra*. Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2nd edition.