UM ESTUDO SOBRE GRUPOS TOPOLÓGICOS

Palavras-Chave: Grupo topológico, Espaço quociente, Espaço conexo

Fernanda dos Santos Bregolim, FCT, UNESP

Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis (orientador), FCT, UNESP

INTRODUÇÃO:

Este trabalho consiste em um estudo sobre grupos topológicos, ou seja, grupos que também são espaços topológicos nos quais as operações multiplicação e inversão de grupos são contínuas. Em especial, foram estudados os grupos topológicos conexos. Como objetivo principal, vimos um resultado útil para mostrar, via espaços quocientes, que certos grupos topológicos que aparecem com frequência em Matemática, Física, entre outras áreas da ciência, são conexos.

METODOLOGIA:

O desenvolvimento deste trabalho foi feito através do estudo de conceitos, resultados e técnicas da teoria de grupos topológicos utilizando as referências bibliográficas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Definição 1: Um grupo topológico é um grupo com uma estrutura de topologia em que as aplicações produto p: G × G → G, definida por p(g,h) = gh e inversa i: G → G, i(g) = g^{-1}, são contínuas.

Proposição 1: Seja G um grupo topológico e g um elemento de G. Então as aplicações:

i) E_g: G → G dada por E(h)=gh (translação à esquerda).

ii) D_g: G → G, D(h)=hg (translação à direita) são homeomorfismos.

Exemplo 1: Exemplos de grupos topológicos:

- O grupo aditivo ($\mathbb{R}^n$, +) com a topologia usual. Em particular, o grupo aditivo ($\mathbb{R}$,+) dos números reais é um grupo topológico.
- O grupo linear $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de todas matrizes reais $n \times n$ invertíveis com a topologia induzida do espaço das matrizes.
- O grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ das matrizes $n \times n$ ortogonais.
- O grupo ortogonal especial $\mathrm{SO}(n)$ das matrizes ortogonais $n \times n$ com determinante igual a 1.
- O grupo unitário $\mathrm{U}(n)$ das matrizes $n \times n$ unitárias.
- O grupo unitário especial $\mathrm{SU}(n)$ das matrizes unitárias $n \times n$ com determinante igual a 1.

Definição 2: Um espaço topológico X é desconexo se existem abertos U, V ambos não vazios tais que U ∩ V = Ø e U ∪ V = X (desconexão de X). Se um dos abertos for vazio, a desconexão X = U ∪ V é dita trivial.

Definição 3: Um espaço topológico X é conexo se a única desconexão possível é a trivial.

Exemplo 2:

- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ são espaços desconexos.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ são espaços conexos.
- A esfera unitária S^n dos elementos $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tais que $(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{n+1})^2 = 1$ é conexa se $n \geq 1$.

Definição 4: Um grupo G age (à esquerda) num conjunto X se existe uma aplicação $\varphi: G \times X \to X$ satisfazendo:

i) $\varphi(1, x) = x$, para qualquer $x \in X$,

ii) $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$, para quaisquer $g,h \in G$.

Exemplo 3: A aplicação $\varphi: \mathrm{SO}(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ dada por $\varphi(A,x) = Ax$ é uma ação de $\mathrm{SO}(n)$ em S^{n-1}.

Exemplo 4: Sejam H um subgrupo de um grupo G e G/H o conjunto das classes laterais gH, $g \in G$ (espaço quociente G/H). A aplicação $\varphi: G \times G/H \to G/H$ definida por $\varphi(g, hH) = (gh)H$ é uma ação de G em G/H.

Definição 5: O subgrupo de isotropia de um elemento $x \in X$, denotado por G_x, é o conjunto dos elementos de $g \in G$ tais que $gx = x$.

Definição 6: Uma ação de um grupo G em X é transitiva se para quaisquer $x,y \in X$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Exemplo 5: Como acima, as ações de $\mathrm{SO}(n)$ em S^{n-1} e de G em G/ H são transitivas.

Definição 7: Seja Y um espaço topológico e ~ uma relação de equivalência em Y. Seja Y /~ o conjunto das classes de equivalência da ~ e seja $\pi : Y \to Y/\sim$ a aplicação canônica sobrejetora tal que a cada $y \in Y$ associa a sua classe de equivalência. A topologia quociente em Y / ~ é aquela em que um subconjunto $A \subset Y \mid \sim$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(A)$ é aberto em Y.

Em particular, se G é um grupo topológico, o conjunto das classes laterais G/H pode ser munido da topologia quociente pela relação de equivalência x ~ y se, e somente se, xH = yH. Assim, a projeção canônica $\pi : G \to G \mid H$ é contínua e aberta.

Teorema 1: Suponha que ação $\varphi: G \times X \to X$ de G em X é transitiva. Fixe x em X. Então a aplicação $\mu_x: G/G_x \to X$, definida por $\mu_x(g\, G_x) = gx$, é bijetora.

Definição 8: Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico X. Uma ação de G em X é continua se a aplicação $\varphi: G \times X \to X$, $\varphi(g, x) = gx$, é contínua.

Proposição 2: Suponha que a ação de G em X seja contínua e seja X um espaço de Hausdorff. Então o subgrupo de isotropia G_x, com $x \in X$, é fechado.

Teorema 2: Seja $\varphi: G \times X \to X$ uma ação contínua e transitiva. Fixe x em X e seja a bijeção $\mu_x: G/G_x \to X$ definida por $\mu_x(g\, G_x) = gx$. Então μ_x é contínua em relação à topologia quociente em G/G_x.

Seja G um grupo localmente conexo, no sentido em que todo ponto tem uma vizinhança aberta conexa. Seja também a bijeção contínua $\mu_x: G/G_x \to X$, com $x \in X$, no contexto em que X é um espaço de Baire, isto é, a união enumerável de

conjuntos fechados com interior vazio tem interior vazio.

Teorema 3: Seja φ: $G \times X \to X$ uma ação contínua e transitiva. Suponha que G seja localmente compacto e separável (ou seja, possui um conjunto enumerável denso). Suponha que X seja de Hausdorff e um espaço de Baire. Então as aplicações μ_x são homeomorfismos em relação à topologia quociente em G/G_x.

Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Assim, se G é conexo então o quociente G/H é conexo.

Teorema 4: Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Se H e G /H são conexos, então G é conexo.

Exemplo 6: $\mathrm{SO(n)}, \mathrm{U(n)}, \mathrm{SU(n)}$ são conexos, $n \geq 1$.

CONCLUSÕES:

Neste trabalho foi feito um estudo sobre grupos topológicos, em que foram estudados conceitos, resultados sobre grupos topológicos e suas aplicações. Em especial, foram estudados os grupos topológicos conexos, em que vimos, através de espaços quocientes, que certos grupos topológicos, como o grupo ortogonal especial, grupo unitário, e grupo unitário especial, são conexos.

AGRADECIMENTOS:

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKER, Andrew. **Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory**. Londres, Springer-Verlag, 2002.

CURTIS, Morton L. **Matrix Groups**. 2 ed. Nova York, Springer, 1984.

HALL, Brian C. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction**. Nova York, Springer-Verlag, 2003.

HIGGINS, P. J. **An Introduction to Topological Groups**. Cambridge University Press, New York, 1974.

LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro. IMPA, 1969.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

PONTRYAGIN, L. **Topological Groups**. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946.

SAN MARTIN, Luiz A. B. **Grupos de Lie**. 1 ed. Campinas, Editora da Unicamp, 2017.