Uma introdução matemática à dinâmica dos fluidos

Palavras-Chave: Dinâmica dos Fluidos, Equações Diferenciais, Equações de Navier-Stokes

Autores(as):
Allan Ribeiro da Silva, IMECC-UNICAMP
Prof(a), Dr(a) Gabriela Del Valle Planas, IMECC-UNICAMP

INTRODUÇÃO:

A mecânica dos fluidos estuda o comportamento de substâncias que podem escoar e se deformar continuamente quando submetidas a forças externas. Os fluidos abrangem líquidos e gases. Enquanto líquidos possuem volume bem definido, gases podem se expandir para ocupar todo o espaço disponível.

Atualmente, a dinâmica dos fluidos é uma área fundamental nas ciências e engenharias, sendo aplicada em setores como aerodinâmica, escoamento de petróleo e meteorologia. Seu estudo busca modelar e prever o comportamento dos fluidos em diferentes contextos, contribuindo para o desenvolvimento de tecnologias e processos industriais.

Para descrever o movimento dos fluidos, utilizam-se princípios fundamentais como a conservação de massa, a conservação de momento e a conservação de energia. Em situações simples, esses princípios são suficientes para uma modelagem precisa. No entanto, em problemas mais complexos, torna-se necessário considerar variáveis adicionais, como a viscosidade, que mede a resistência ao escoamento, e a compressibilidade, que define a variação de volume do fluido sob pressão.

Além da necessidade de considerar múltiplas variáveis em problemas reais, um dos principais desafios da mecânica dos fluidos é o estudo da camada limite ou fronteira. Essas regiões correspondem às áreas onde os efeitos viscosos são predominantes, e as equações tradicionais, como as de Euler, deixam de ser plenamente aplicáveis, alguns exemplos de camadas limietes são: Interação entre um fluido e uma superfície sólida, separação de combustivel e resíduo em um chama, aerodinâmica de veículos e aeronaves.

1 Equações da Continuidade e de Euler

A dinâmica dos fluidos é construída sobre três princípios fundamentais:

1. A massa não pode ser criada nem destruída.
2. A segunda lei de Newton (lei da inércia) é sempre válida.
3. A energia não pode ser criada nem destruída.

A partir desses princípios, é possível derivar a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

O equilíbrio de momento:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{B},$$

E, avaliando a conservação de volume com o **teorema do transporte de Reynolds**:

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho\, f\, dV = \int_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt}\, dV,$$

é possível concluir que, se o volume se conserva:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Então:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Ou seja, não existem sumidouros nem fontes no campo de velocidade do fluido.

As equações de Euler para fluidos **incompressíveis** são a união de:

1. $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{B}$,
2. $\nabla \cdot \vec{u} = 0$,
3. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

2 A Equação de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes são uma generalização das equações de Euler, incorporando os efeitos da viscosidade na dinâmica dos fluidos. Enquanto as equações de Euler descrevem o comportamento de fluidos não viscosos, a formulação de Navier-Stokes acrescenta os termos dissipativos responsáveis pela difusão de momento devido à viscosidade.

A equação é deduzida com base em σ, um tensor de tensões que atua sobre uma massa de fluido, conhecido como **tensor de Cauchy**. Esse tensor possui as seguintes características: é invariante sob rotações, simétrico e linearmente dependente de $\nabla \vec{u}$. Com base em seus autovalores, é possível expressá-lo da seguinte forma:

$$\sigma = \lambda(\nabla \cdot \vec{u}) I + 2\mu D,$$

onde D é a parte simétrica do gradiente de velocidade, μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica e λ está relacionado à compressibilidade do fluido.

A equação obtida para fluidos incompressíveis é:

$$\rho_0 \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}.$$

Note que essa equação se assemelha à equação de Euler, com o acréscimo do termo $\mu \nabla^2 \vec{u}$, que representa a **dissipação de momento** causada pela viscosidade.

Uma propriedade fundamental relacionada à viscosidade é o **número de Reynolds**, um parâmetro adimensional que relaciona a inércia com os efeitos viscosos, permitindo a distinção entre regimes de fluxo **laminar** e **turbulento**.

A partir de uma mudança de variáveis para obter uma forma adimensional das equações de Navier-Stokes em fluidos homogêneos e incompressíveis, o número de Reynolds é definido como:

$$Re = \frac{UL}{\nu},$$

onde U e L são, respectivamente, a velocidade e o comprimento característicos do escoamento, e $\nu = \mu/\rho_0$ é a viscosidade cinemática.

Reescrevendo as equações de Navier-Stokes nessa forma adimensional, obtemos:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}.$$

Aqui, o termo $\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}$ representa a **dissipação viscosa**, enquanto o termo convectivo $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ está embutido na derivada total.

Em geral, para problemas de engenharia, aplicam-se condições de contorno à equação, de forma que seja possível utilizar simetrias para encontrar soluções suficientemente precisas sem a necessidade de computação numérica. Essas aplicações descrevem escoamentos clássicos, como o de Poiseuille, que representa um escoamento laminar entre placas paralelas, resultando em perfis de velocidade parabólicos.

3 Rotações e Vorticidade

Quando um fluido se move em um campo de velocidade com rotações, ele está em um campo de vorticidade, que pode ser escrito como:

$$\xi = \nabla \times \vec{u} = \left(\partial_y w - \partial_z v,\ \partial_z u - \partial_x w,\ \partial_x v - \partial_y u\right).$$

Ao longo do movimento de um fluido, existe uma medida chamada **circulação**, que fornece uma métrica sobre o movimento do fluido, embora não tenha um significado físico direto. Tomando C como um caminho fechado simples ao redor de uma região fluida e C_t como o contorno ao redor dessa massa de fluido, podemos definir a circulação.

O **Teorema de Kelvin** sobre a circulação afirma que, para um fluido isentrópico e sem forças externas:

$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t} \vec{u}\cdot d\vec{s},$$

a circulação Γ_{C_t} é constante ao longo do tempo.

Com o Teorema de Kelvin, é possível obter outro resultado importante: o **Teorema de Helmholtz**, que envolve os chamados *tubos de vórtice* — estruturas tubulares teóricas que contêm o movimento rotacional de um fluxo.

Teorema de Helmholtz: Para um fluido isentrópico, com C_1 e C_2 representando duas curvas transversais ao tubo de vórtice, a integral de linha da velocidade ao longo dessas curvas (conhecida como força do vórtice) obedece às seguintes propriedades:

1. $\oint_{C_1} \vec{u}\cdot d\vec{s} = \oint_{C_2} \vec{u}\cdot d\vec{s}$;
2. A força do vórtice é constante ao longo do tempo.

Outra quantidade importante é a **vorticidade por unidade de massa**:

$$\omega = \frac{\xi}{\rho}.$$

Essa grandeza é transportada ao longo do fluxo e, para fluidos isentrópicos, obedece à equação:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} + (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u} = 0.$$

Com esses resultados, podemos definir as equações gerais da vorticidade em duas dimensões:

1. $D\xi Dt = \partial_t \xi + (\vec{u} \cdot \nabla)\xi = 0$;

2. $\Delta\psi = -\xi$;

3. $\psi|_{\partial D} = 0$.

Aqui, ψ é uma função escalar que mapeia uma região D, com $\psi(x, y, t)$ tal que $u = \partial_y \psi$ e $v = -\partial_x \psi$. Em duas dimensões, a vorticidade é expressa como:

$$\xi = -\partial_x v + \partial_y u = -\partial_x^2 \psi - \partial_y^2 \psi = -\Delta\psi.$$

Nas fronteiras da região, assume-se que a vorticidade é nula, ou seja, $\xi|_{\partial D} = 0$.

No entanto, os resultados para três dimensões são mais complexos e requerem um aprofundamento matemático adicional.

4 Fluxo Potencial e o Paradoxo de D'Alembert

O fluxo potencial é definido por um escoamento não viscoso e não rotacional, isto é:

1. $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ *(incompressibilidade)*

2. $\nabla \times \vec{u} = 0$ *(irrotacionalidade)*

Em um domínio simplesmente conexo de 2 dimensões, as equações para $\vec{u} = (u, v)$ são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Essas equações satisfazem as relações de Cauchy-Riemann, então, tomando $V = u + iv$, V representa a velocidade complexa do fluido no meio.

A força exercida por um fluxo em um objeto rígido ao longo de sua trajetória é dada pela força exercida em seu exterior, ou seja:

$$F = -\int_{\partial B} p\, \vec{n}\, ds$$

Onde ∂B representa a borda do objeto e p a pressão.

Enunciando agora o **Teorema de Blasius**, que relaciona a força sobre um corpo com sua velocidade potencial:

$$F = \frac{-i\rho}{2} \left[\int_{\partial B} V^2\, dz \right]^*$$

Este teorema relaciona a força sobre um corpo com a integral do conjugado da velocidade complexa ao longo da borda.

Este resultado é muito importante para a aerodinâmica, pois permite o cálculo da força sobre uma asa ou aerofólio sem a necessidade de conhecer a distribuição de pressão, possibilitando simulações de sustentação e arrasto.

Outro teorema importante é o **Teorema de Kutta-Joukowski**, que, para um fluxo potencial sobre um corpo B com campo de velocidade $\vec{U}$ constante no infinito, fornece a força sobre o corpo como:

$$F = -\rho\, \Gamma_c\, ||\vec{U}||\, \vec{n}$$

Aqui, a força está associada à circulação ao redor do corpo e ao campo de velocidades ortogonal a $\vec{n}$.

Esse é outro resultado fundamental no contexto aerodinâmico, pois permite calcular forças sobre corpos assimétricos. Sua principal aplicação é no *método dos painéis*, um método numérico para cálculo de circulações em corpos assimétricos, utilizado em soluções de escoamentos bidimensionais e tridimensionais.

4.1 O Paradoxo de D'Alembert. Vamos utilizar os teoremas de Blasius e Kutta-Joukowski para analisar as forças em um objeto imerso em um fluxo potencial.

Analisando um fluxo potencial bidimensional com um objeto fechado em seu caminho, temos que a força sobre o exterior desse objeto é o resultado do teorema de Blasius:

$$F = \frac{-i\rho}{2} \left[\int_{\partial B} V^2 \, dz \right]^*$$

Contudo, como o objeto é um corpo sólido, ele forma um caminho fechado simples. Como a velocidade complexa V satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, ela é uma função analítica.

Logo, pelo teorema integral de Cauchy, a integral de uma função analítica sobre um caminho fechado simples é:

$$F = \frac{-i\rho}{2} \oint_{\partial B} V^2 \, dz = 0$$

Portanto, não existe força agindo sobre o corpo em um escoamento potencial — ou seja, não há arrasto.

Utilizando agora o teorema de Kutta-Joukowski:

$$F = \rho \, \Gamma_{\partial B} \, ||\vec{U}|| \, \vec{n} = 0$$

Como a velocidade do fluxo e a densidade não são nulas, a única conclusão é que não existe circulação.

Logo, um objeto em um fluxo potencial não sofre arrasto nem sustentação aerodinâmica, independentemente de seu ângulo de ataque, i.e., não é possível que ele sofra pressão do fluxo para se levantar.

Porém, toda vez que um avião levanta voo ou um carro se move, esses resultados são contrariados, pois o carro sofre arrasto e o avião utiliza a pressão aerodinâmica para voar.

Estamos, portanto, diante de um paradoxo. O que explica a existência dessas forças sobre os corpos é a viscosidade, que não será abordada neste resumo.

5 Bibliografia

Referências

[1] John D. Anderson.(2016). *Fundamentals of Aerodynamic.* 6th ed. McGraw-Hill Education.

[2] Chorin, A. J., & Marsden, J. E. (2015). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.* Springer.

[3] Walter J. Maciel, em "Hidrodinâmica e Ventos Estelares: Uma Introdução"(EDUSP, 1999), explora os princípios da hidrodinâmica no contexto da astrofísica estelar, com foco nos ventos estelares.