



Renormalização de Redes Complexas

Palavras-Chave: Redes, Grafos, Renormalização

Autores(as):

Gabriel Almeida dos Santos Bonin, IMECC – Unicamp

Prof. Dr. José Antônio Brum (orientador), IFGW - Unicamp

INTRODUÇÃO:

Os grafos são ferramentas poderosas para representar as relações e interações entre os elementos de sistemas complexos, desde o cérebro até os mercados financeiros, permitindo a análise e modelagem desses sistemas. No entanto, como diferentes características desses sistemas emergem em diferentes escalas, é útil aplicar técnicas que permitam uma visão além da estrutura detalhada do grafo (rede) — processo conhecido como *coarse-graining*.

Essencialmente, o Grupo de Renormalização [1] oferece um método sistemático para compreender sistemas físicos em diferentes escalas. A ideia está fundamentada no reconhecimento de que certas características de um sistema podem exibir auto-similaridade quando observadas em diferentes níveis de ampliação. Ao realizar uma sucessão de *coarse-graining*, ou seja, uma redução da resolução do sistema, o RG permite que os físicos explorem seu comportamento em diferentes resoluções sem perder informações essenciais, ou seja, preservando sua estrutura.

No contexto de redes complexas, buscamos identificar padrões recorrentes e propriedades emergentes em diferentes níveis de escala. A abordagem permite simplificar a representação da rede em escalas maiores, mantendo informações essenciais sobre sua estrutura e dinâmica. A renormalização frequentemente envolve a identificação de blocos ou módulos de nós altamente interconectados ou correlacionados. Esses blocos podem ser agregados para formar super-nós, simplificando a estrutura da rede em uma escala maior. Esse processo iterativo pode ser repetido, permitindo uma análise hierárquica da rede.

METODOLOGIA:

A teoria de redes complexas tem como base a teoria de grafos [2], aplicada ao estudo de sistemas complexos [3, 4]. Um dos modelos de *coarse-graining* utilizando o laplaciano, inspirado em sistemas desordenados, foi desenvolvido pelo nosso grupo de pesquisa [5] e estudado em trabalhos anteriores [6].

Neste projeto, serão aprofundados os conhecimentos sobre o grupo de renormalização via laplaciano, conforme desenvolvido pelo grupo de Caldarelli et al. [7], que explora as propriedades de difusão nas redes.

Também será estudada em maior profundidade a técnica proposta por Bialek et al. [8], aplicada a redes funcionais. Como ampliação do escopo em relação à proposta inicial, será incluído o estudo do modelo espectral de renormalização pelo laplaciano proposto por Schmidt et al. [9].

Os trabalhos computacionais serão desenvolvidos na linguagem *Python*, utilizando diversas bibliotecas como *Numpy*, *Pandas* e *Networkx*.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

1. Modelo Caldarelli

O método de Caldarelli et al. [7] propõe uma renormalização para redes complexas baseada na difusão de informação regida pelo laplaciano da rede. A ideia central é acompanhar a evolução de um campo escalar ϕ ao longo do tempo via a equação $\phi(\tau) = e^{-\tau L}\phi(0)$, definindo assim um operador de densidade $\rho(\tau)$ que reflete como a informação se propaga na rede.

A partir da entropia de $\rho(\tau)$, calcula-se a capacidade térmica $C(\tau)$, cujos picos revelam as escalas estruturais características da rede. Nessas escalas, agrupam-se nós fortemente conectados em blocos, que são então substituídos por supernós, gerando uma versão reduzida da rede.

2. Modelo Bialek

O modelo proposto por Bialek et al. [8] foi desenvolvido para redes funcionais, nas quais as correlações são extraídas a partir de séries temporais de atividade. A abordagem sugere dois caminhos de renormalização: um no espaço real, considerando correlações diretas entre os nós, e outro no espaço de momentos, explorando os autovalores e autovetores do laplaciano da rede.

Assume-se um sistema com N nós, cujas atividades são descritas por uma probabilidade conjunta $P(\{\phi_i\})$, onde $\{\phi_i\}$ representa os estados dos nós. O *coarse-graining* pode ser realizado tanto no espaço real quanto no espaço de momento.

Neste projeto, o foco será apenas no estudo teórico da técnica, sem a realização de simulações. Isso se deve à complexidade adicional envolvida na construção e manipulação de redes funcionais, que exigem dados temporais e métodos específicos para inferência de conectividade.

3. Modelo Schmidt

Já o modelo espectral proposto por Schmidt et al. [9] também utiliza o laplaciano da rede, mas segue uma abordagem distinta, baseada em conceitos de filtragem espectral.

Inicialmente, os autovalores e autovetores do laplaciano são calculados, e apenas os modos de baixa frequência (relacionados a padrões estruturais de larga escala) são mantidos. Em seguida, calcula-se a similaridade entre pares de nós com base em sua projeção nesses modos filtrados, e os pares mais semelhantes são contraídos, reduzindo o tamanho da rede. O processo é iterativo, e a cada etapa a nova rede passa por um novo filtro

espectral. Esse método preserva as propriedades espectrais globais da rede, permitindo o estudo de como características estruturais se mantêm ao longo da renormalização.

Os três métodos estudados propõem abordagens distintas de renormalização em redes complexas, cada um com vantagens e limitações específicas. O modelo de Caldarelli baseia-se na dinâmica de difusão de informação via o laplaciano da rede, utilizando medidas como entropia e capacidade térmica para identificar escalas estruturais relevantes e aplicar o *coarse-graining* por agrupamento de nós com forte acoplamento difusivo. Já o modelo de Bialek, embora conceitualmente sofisticado, depende da análise de redes funcionais derivadas de séries temporais e da formulação da dinâmica em termos de uma distribuição de probabilidade conjunta dos estados dos nós, o que limita sua aplicação prática neste projeto apenas ao estudo teórico. Por fim, o modelo espectral de Schmidt opera diretamente no espaço dos autovalores e autovetores do laplaciano, preservando propriedades estruturais globais da rede ao contrair pares de nós com comportamento espectral semelhante, sendo adequado para simulações e análises iterativas.

Realizando uma análise quantitativa simulando as redes renormalizadas pelos métodos de Schmidt e Caldarelli, observa-se semelhanças estruturais (*Figura 1 e 2*), mas com diferenças importantes na forma como cada técnica preserva ou reorganiza a conectividade original. Enquanto o método de Schmidt realiza contrações entre os nós com base na similaridade espectral — mantendo os modos de baixa frequência do laplaciano —, sua abordagem tende a preservar a hierarquia estrutural da rede, o que se reflete em uma topologia reduzida que mantém a heterogeneidade de graus característica do modelo Barabási-Albert. Por outro lado, o método de Caldarelli atua por meio da dinâmica de difusão, agrupando nós que compartilham trajetórias de propagação semelhantes. Esse processo leva a uma reorganização da rede onde os blocos formados tendem a ter conectividade mais equilibrada entre si, o que reduz a variação de graus e produz uma distribuição mais homogênea.

A comparação das distribuições de grau (*Figura 3*) entre as redes renormalizadas mostra-se uma ferramenta útil para avaliar essas diferenças. No caso de Caldarelli, observa-se um achatamento da distribuição, indicando uma perda parcial das características de hubs típicas da rede original. Já o método de Schmidt, ao preservar as propriedades espectrais globais, mantém melhor a assinatura de uma distribuição livre de escala.

Ainda como parte do trabalho que será futuramente exposta no relatório final, outros testes estruturais podem ser realizados, incluindo a análise do parâmetro k_{nn} , que representa o grau médio dos vizinhos de um nó. Esse parâmetro é especialmente útil para investigar correlações de conectividade dentro da rede, ou seja, se nós com alto grau tendem a se conectar com outros nós de alto ou baixo grau (assortatividade ou desassortatividade). Através dessa métrica, será possível avaliar até que ponto as transformações preservam a organização relacional entre os nós, o que fornece uma camada adicional de interpretação sobre a fidelidade estrutural dos métodos de renormalização.

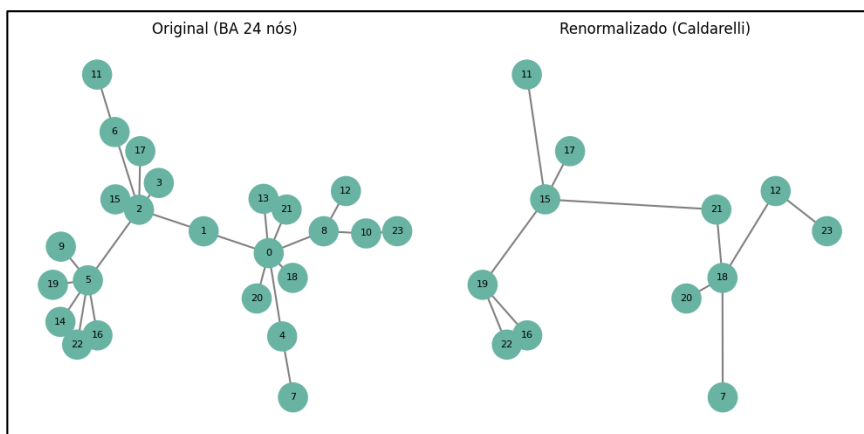


Figura 1: Etapas do processo de renormalização por difusão [7] aplicado a uma rede do tipo Barabási-Albert. Da esquerda para a direita: (i) grafo original; (ii) rede renormalizada obtida a partir da dinâmica de difusão governada pelo laplaciano, com agregação de nós baseada nas escalas identificadas via entropia e capacidade térmica.

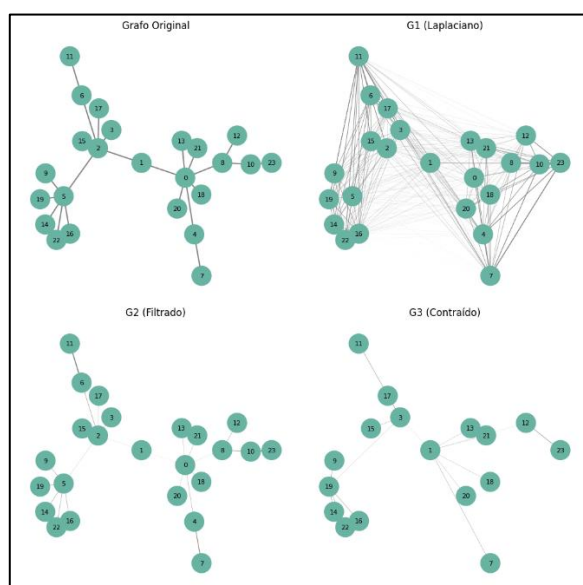


Figura 2: Etapas do processo de renormalização espectral [9] aplicado a uma rede do tipo Barabási-Albert com 24 nós. Da esquerda para a direita: (i) grafo original; (ii) representação espectral com base no laplaciano (G1); (iii) matriz filtrada contendo os modos de baixa frequência (G2); e (iv) rede renormalizada após a contração dos pares mais similares (G3 ou GR, para este caso).

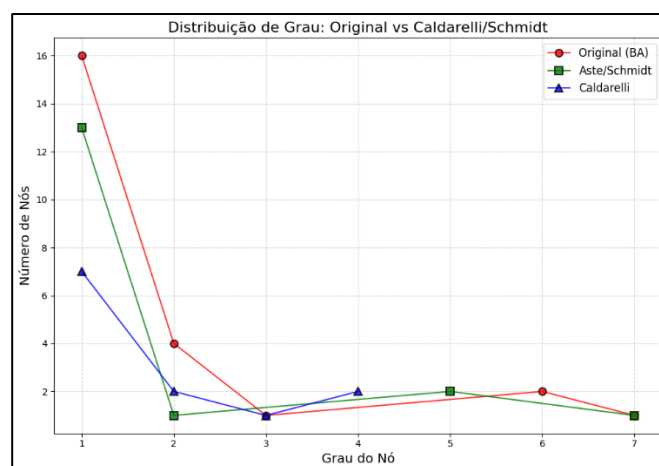


Figura 3: Distribuição de grau comparando a rede original do tipo Barabási-Albert (24 nós) com suas versões renormalizadas pelos métodos de Schmidt e Caldarelli. Observa-se que o método de Schmidt tende a preservar a estrutura hierárquica da rede, mantendo uma distribuição semelhante à original, enquanto o método de Caldarelli produz uma redistribuição mais homogênea dos graus, refletindo o agrupamento difusivo dos nós.

BIBLIOGRAFIA

- [1] K. Huang. *Statistical Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 1987
- [2] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*, New York, US: Springer, 1998.
- [3] M.E.J. Newman. *Networks*. Oxford; New York: Oxford University Press, 2010.
- [4] A.-L Barábasi. *Network Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [5] M. C. Loures, A. A. Piovesana e J. A. Brum. *Laplacian Coarse-Graining in Complex Networks*. 2023. *arXiv: 2302.07093* [cond-mat.dis-nn]
- [6] G. A. S. Bonin. *Análise de redes complexas por interações de ordem superior e em multi-escalas*. Relatório Final – PIBIC. Universidade Estadual de Campinas, 2024.
- [7] P. Villegas, G. Caldarelli T. Gili e A. Gabrielli. *Laplacian Renormalization Group for heterogeneous networks*. Em: *Nature Physics* 19 (2023), pp. 445-450. DOI: 0.1038/s41567-022-01866-8.
- [8] L. Meshulam et al. *Coarse-graining and hints of scaling in a population of 1000+ neurons*. Em: *arXiv: 1812.11904v1* [physics.bio-ph] (2018)
- [9] F. Caccioli, M. Schmidt and T. Aste. *Spectral coarse-graining and rescaling for preserving structural and dynamical properties in graphs*.