Ferramentas em Álgebra - Representações de Grupo em PI-Teoria

Palavras-Chave: álgebra, identidades polinomiais, teoria de Young

Autores(as):
Kauê Ferracini de Almeida, IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Claudemir Fideles Bezerra Júnior (orientador), IMECC - UNICAMP

---

1 Introdução

Este projeto de pesquisa pretende estudar, a partir da teoria de representações de grupo, as álgebras com identidades polinomiais. O foco inicial do projeto foi estabelecer uma base concreta nas estruturas algébricas principais (álgebras, módulos, anéis, ideais) para então prosseguir para grandes resultados, como a Regra de Littlewood-Richardson e o Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt. Posteriormente, toda essa teoria foi utilizada para entender as álgebras de Grassmann, de matrizes triangulares superiores e as matrizes 2×2.

2 Metodologia

A metodologia adotada foi a usual em estudos teóricos de matemática. Uma parte inseparável desses materiais consiste em exercícios selecionados com cuidado e ordenados de modo a levar o leitor a refletir sobre os aspectos mais importantes da teoria.

3 Estudos realizados

3.1 Estruturas básicas

Todo o trabalho se iniciou com a definição e a compreensão do conceito de álgebra. Sendo esse o primeiro contato com essa estrutura, foi dedicado um tempo para entender alguns exemplos e alguns resultados sobre ela. O material utilizado foram as notas de aula presentes em [4].

Definição 1. *Sejam K um corpo e A um K-espaço vetorial. Uma* ***K-álgebra****, ou simplesmente* ***álgebra****, é um par* $(A, *)$ *onde* $* : A \times A \to A$ *é uma aplicação bilinear satisfazendo:*

(i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(ii) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ *e* $\lambda \in K$.

Com o objetivo de dar uma ideia do que seria estudado posteriormente, as 3 primeiras seções do primeiro capítulo de [1] foram estudadas e, em seguida, focamos na estrutura da álgebra de grupo KG, onde o corpo sempre tem característica 0. Naturalmente, o que foi estudado na sequência tem importância significativa no andamento do projeto: os módulos sobre álgebras.

Definição 2. *Seja G um grupo. Consideramos o conjunto KG de todas as somas formais $\sum_{g\in G} \alpha_g g$, onde $\alpha_g \in K$ e o conjunto $\{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$ é finito. Definimos nessa estrutura a soma e o produto por escalar, respectivamente:*

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$
$$\lambda \sum_{g\in G} \alpha_g g = \sum_{g\in G} \lambda \alpha_g g, \text{ para todo } \lambda \in K$$

*A partir dessas definições, KG é um espaço vetorial com base G. Por outro lado, é possível enxergar KG como uma álgebra associativa com unidade que chamaremos de **álgebra de grupo**.*
Essa estrutura será de extrema importância para a compreensão das representações do grupo simétrico.

3.2 Representações do grupo simétrico

Naturalmente podemos definir um $KG-$módulo, onde o produto é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \star\colon KG \times V &\to V \\ \left(\sum_{g\in G} \alpha_g g, v\right) &\mapsto \left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \star v = \sum_{g\in G} \alpha_g \varphi_g(v) \end{aligned}$$

onde $\varphi : G \to GL(V)$ é um homomorfismo de grupos dado por $\varphi(g) = \varphi_g$.

Agora, sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Então podemos definir

$$\varphi : A \to \mathcal{L}(M)$$
$$a \mapsto \varphi_a$$

onde $\varphi_a(m) = a \cdot m, \ \ \forall m \in M$.

Reciprocamente, seja M um espaço vetorial e $\psi : A \to \mathcal{L}(M)$ um homomorfismo de álgebras, definimos o produto $\cdot : A \times M \to M$ onde $(a, m) \mapsto a \cdot m = \psi(a)(m)$.

Perceba a relação (biunívoca) que existe entre as estruturas de A-módulo em M e os homomorfismos entre as álgebras A e $\mathcal{L}(M)$. Neste caso um homomorfismo $\varphi : A \to \mathcal{L}(M)$ é também chamado de **representação** de A.

Dada essa relação, alguns resultados como o lema de Schur e o Teorema de Maschke podem ser reformulados com essas ferramentas.

Teorema 1. *(Maschke) Seja G um grupo finito e K um corpo cuja a característica não divida |G|. Então todo G-módulo é completamente redutível.*

Um resultado bem interessante presente em [4] traz uma relação entre os ideais minimais de KG e os G-módulos irredutíveis.

Lema 1. *Todo G-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de KG. Em outras palavras, toda representação linear irredutível de G é equivalente a uma subrepresentação da representação regular à esquerda de G.*

Demonstração. Seja V um G-módulo irredutível e fixemos $v_0 \in V \setminus \{0\}$. Considere a transformação linear $T : KG \to V$ que satisfaz $T(g) = g \cdot v_0$, para todo $g \in G$.

É fácil observar que T é um homomorfismo de G-módulos e assim, pela irredutibilidade de V, deve ser sobrejetora.

Tomemos agora um ideal à esquerda I de KG tal que $KG = \ker T \oplus I$. Considerando então à restrição de T a I

$$T_1 : I \to V; \quad T_1(\alpha) = \alpha \cdot v_0$$

temos que $\operatorname{Im} T_1 = \operatorname{Im} T = V$, pois se $\alpha_1 \in \ker T$ e $\alpha_2 \in I$ então $T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_2)$. Além disso, $\ker T_1 \subseteq \ker T \cap I$ e portanto $\ker T_1 = \{0\}$. Temos então que T_1 é um isomorfismo de KG-módulos e assim I é isomorfo a V. Observe que isto implica que todo G-módulo irredutível tem dimensão finita. $\square$

Outro resultado bem importante que foi fundamental para o prosseguimento dos estudos, especificamente para a teoria de Young, é o seguinte:

Teorema 2. *Se K é um corpo algebricamente fechado cuja característica não divide a ordem de um grupo finito G, então*

(i) $KG \simeq M_{d_1}(K) \times M_{d_2}(K) \times \cdots \times M_{d_m}(K)$*, onde* $d_1, d_2, \ldots, d_m$ *são os graus das* K*-representações não isomorfas de G;*

(ii) $|G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_m^2$;

(iii) O número de K*-representações irredutíveis de G é finito, a menos de equivalência, e é igual ao número de classes de conjugação de G.*

Nesse primeiro momento da Iniciação Científica nos debruçamos sobre o grupo simétrico. Para isso, rapidamente retomamos conceitos previamente estudados como permutações, classes de conjugação e tabelas de caracter para então dar início a esse estudo mais aprofundado das representações de KS_n.

A teoria de Young parte de uma definição simples e de argumentos combinatórios que se desenrolam em resultados surpreendentes.

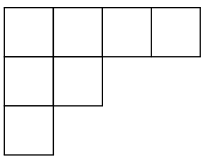
Definição 3. *Seja* $n \in \mathbb{N}$*. Definimos uma partição de* n *como uma r-upla* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ *de números naturais tais que* $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \geq 1$ *e* $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$*. Denotamos por* $(n_1, n_2, \ldots, n_r) \vdash n$ *essa partição.*

Observação 3. *Para facilitar a notação, caso* $n_i = n_{i+1} = \cdots = n_k$ *para algum* $k, i \in \mathbb{N}$*, representamos a quantidade repetida no expoente. Por exemplo,* $(4, 3^2) = (4, 3, 3) \vdash 10$ *ou* $(4^2, 2, 1^2) = (4, 4, 2, 1, 1) \vdash 12$.

Definição 4. *Seja* $\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_r) \vdash n$*. Definimos o diagrama de Young* D_λ *da partição* λ *como sendo o conjunto* $D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i\}$

A partir da definição dada acima, podemos agora entender as partições de um número como uma organização de células dispostas em linhas, seguindo a disposição da esquerda para a direita e de cima para baixo, onde todo primeiro bloco de cada linha está na primeira coluna. Por exemplo, sendo $\lambda = (4, 2, 1) \vdash 7$, o diagrama de Young D_λ é:

D_λ=



A teoria começa a se aproximar da teoria de representações de grupo mais fortemente quando preenchemos cada caixa de um diagrama associado a uma partição de n com os naturais $\{1, 2, \ldots, n\}$, sem repetições.

Definição 5. *Uma tabela de Young* T *do tipo* λ *é uma numeração das células de um diagrama de Young* D_λ *por inteiros* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

A teoria se desenvolve de maneira mais aprofundada e mais detalhes podem ser encontrados nos subcapítulos 2.1, 2.2 e 2.3 de [2] e também no capítulo 9 de [4]. Destacarei dois resultados que julgamos importantes para o desenrolar dos estudos.

Teorema 4. *Para toda partição* $\lambda \vdash n$*, o ideal à esquerda* M_T *é um* S_n*-módulo irredutível. Além disso,* M_T *é unicamente determinado pela partição (em outras palavras, se* T_1 *é uma tabela de Young do tipo* λ_1*, então* $M_T \simeq M_{T_1}$ *como* S_n*-módulo* $\iff \lambda = \lambda_1$*).*

Teorema 5. *Seja K um corpo de característica zero (ou char(K)* $\nmid |S_n| = n!$*) e* $n \geq 1$*. Então:*

(a) Existe uma correspondência biunívoca entre os S_n*-caracteres irredutíveis e as partições de n;*

(b) $Irr_K(S_n) = \{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ *e* $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ *é o grau de* χ_λ*, para cada* $\lambda \vdash n$*;*

(c)

$$KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(K)$$

onde $I_\lambda \simeq M_{d_\lambda}(K)$ o ideal bilateral de KS_n associado a λ. Consequentemente, $n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$.

Com todos esses resultados, o estudo aprofundado das representações de S_n foi concluído momentaneamente com os teoremas e resultados presentes no subcapítulo 2.3 de [2]. Abaixo temos um dos resultados mais complexos sobre representações induzidas de S_n.

Teorema 6 (Littlewood-Richardson Rule)**.** *Seja $\lambda \vdash n$ e $\nu \vdash m$. Então*

$$M_\lambda \widehat{\otimes} M_\mu = \sum_{\nu \vdash n+m} k^\mu_{\nu \backslash \lambda} M_\nu$$

onde $k^\mu_{\nu\backslash\lambda}$ é o número de tabelas semistandard de formato $\nu\backslash\lambda$ e conteúdo μ que produzem lattice permutations quando lemos suas entradas da direita para a esquerda e de cima para baixo.

Observação 7. *Uma lattice permutation é uma sequência concatenada de inteiros positivos, assim como uma palavra, de modo que cada prefixo contém pelo menos tantos inteiros positivos i quantos inteiros $i+1$. Aqui um prefixo é um pedaço da palavra que começa no primeiro inteiro.*

Exemplo 1. *Considere $\nu = (4, 3, 2), \lambda = (2, 1)$ e $\mu = (3, 2, 1)$. Então*

$$D_{\nu\backslash\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & & \\ \hline \times & & & \\ \cline{1-3} & & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Por exemplo, uma possível tabela semistandard de formato $\nu\backslash\lambda$ e conteúdo μ é $T^\mu_{\nu\backslash\lambda} = \begin{array}{ccc|c|c|} \cline{4-5} & & & 1 & 1 \\ \cline{3-5} & & \multicolumn{1}{|c|}{1} & 2 & \\ \cline{2-4} & \multicolumn{1}{|c|}{2} & 3 & & \\ \cline{2-3} \end{array}$

*Note que **112132** é uma lattice permutation.*

3.3 Identidades polinomiais para álgebras concretas

Antes de iniciar os estudos das identidades diretamente, foi necessário entender o ambiente de uma álgebra livre e alguns elementos importantes como as identidades polinomiais, os T-ideais e os polinômios homogêneos e multilineares. Um dos primeiros grandes resultados dessa seção é o seguinte:

Teorema 8. *Seja K um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para uma álgebra A, então toda componente multihomogênea de f é uma identidade polinomial para A.*

Observação 9 (Processo de Linearização)**.** *Sejam I um T-ideal de $K\langle X\rangle$ e $f(x_1, \dots, x_n) \in I$, não nulo. Suponha que $deg_{x_i} f \geq 2$ para algum $i = 1, 2, \dots, n$. Tomando y_1 e y_2 variáveis de X distintos de $x_1, \dots, x_n$, observa-se que*

$$\begin{array}{rcl} g(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, y_2, x_{i+1}, \dots, x_n) & = & f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1 + y_2, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ & - & f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ & - & f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_2, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

está em I e é não nulo. Não é difícil observar que $deg_{y_1} g$ e $deg_{y_2} g$ são menores que $deg_{x_i} f$.

Com o objetivo de estudar diretamente as identidades polinomiais de algumas álgebras associativas, foi preciso conhecer antes suas estruturas envelopantes.

Definição 6. *Se R é uma álgebra associativa e G é uma álgebra de Lie isomorfa à $R^{(-)}$, então dizemos que R é a álgebra envelopante de G. A álgebra associativa $U = U(G)$ é a álgebra universal envelopante da álgebra de Lie G se G é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e se U tem a seguinte propriedade:*

Para qualquer álgebra associativa R e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : G \to R^{(-)}$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \to R$ que estende ϕ, ou seja, $\psi|_G = \phi$.

Teorema 10 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Toda álgebra de Lie G possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra universal envelopante $U(G)$. Se G tem uma base $\{e_i \mid i \in I\}$ e conjunto de índices é ordenado, então $U(G)$ tem base $\{e_{i_1} \cdots e_{i_p} \mid i_1 \leq \ldots \leq i_p, i_k \in I, k = 1, 2, \ldots\}$.*

O avanço mais recente nos estudos foi obtido na referência [1] ao estudarmos os polinômios próprios e as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann e da álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$.

Definição 7. *Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado de polinômio próprio (ou comutador) se é uma combinação linear de produtos de comutadores*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum \alpha_{i,\ldots,j}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \ldots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}], \quad \alpha_{i,\ldots,j} \in K$$

Com todos esses conhecimentos, foi finalmente possível estudar as identidades polinomiais das álgebras citadas anteriormente. Essas identidades serão apresentadas como um lema e um teorema, ambos extraídos do capítulo 5 de [1]. Aqui E denota a álgebra de Grassmann e $UT_n(K)$ denota a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$.

Lema 2 (Adaptado)**.** *Seja G $= \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pela identidade polinomial $[x_1, x_2, x_3] \in Id(E)$. Então os polinômios $[x_1, x_2][x_2, x_3]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$ pertencem a G.*

Teorema 11 (Adaptado)**.** *Seja K um corpo infinito. Então a identidade polinomial*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2k-1}, x_{2k}] = 0$$

forma uma base para $Id(UT_n(K))$.

4 Conclusões

Esse projeto de Iniciação Científica, realizado em 2024.2 e 2025.1, foi pensado para dar fundamentação teórica para o estudo da PI-teoria e possibilitar um estudo mais aprofundado na pós-graduação. Nele foi abordada boa parte das questões presentes em disciplinas introdutórias dessa área, como MM455 - Álgebras com Identidades Polinomiais oferecida pelo IMECC-UNICAMP. Um dos próximos passos é partir para um estudo de outros ambientes, como o não-associativo, além de outras apresentações associadas à PI-teoria.

Referências

[1] DRENSKY, V. S. Free Algebras and PI-algebras. [s.l: s.n.]

[2] GIAMBRUNO, A.; ZAICEV, M. V. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. [s.l.] American Mathematical Soc., 2005

[3] BEZERRA JÚNIOR, C. F. Notas de aula de Introdução às PI-álgebras. 2018.

[4] BEZERRA JÚNIOR, C. F. Notas de aula de Representação de Grupo. 2018.