Processos de Renovação e Aplicações

Palavras-Chave: Processos de renovação, Processos semimarkovianos, Modelagem estocástica, Variáveis aleatórias

Autores:

Pedro Matos Pevide, IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Élcio Lebensztayn (orientador), IMECC - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Considere um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ e seja T_n o tempo entre o $(n-1)$-ésimo e o n-ésimo evento desse processo, com $n \geq 1$. Se a sequência de variáveis aleatórias não negativas $\{T_1, T_2, \dots\}$ é independente e identicamente distribuída (i.i.d.), então o processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ é chamado de *processo de renovação*. Assim, se o tempo até a ocorrência do primeiro evento possui uma distribuição F, então o tempo entre o primeiro e o segundo evento possui, independentemente do tempo do primeiro evento, a mesma distribuição F, e assim por diante. Quando um evento ocorre, dizemos que uma renovação aconteceu. Para um processo de renovação com tempos de ocorrência entre eventos $T_1, T_2, \dots$, sejam

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Então, S_n é o tempo da n-ésima renovação.

METODOLOGIA:

Com enfoque primordialmente teórico, a pesquisa foi realizada a partir de referências bibliográficas e complementada, quando necessário ou buscando maior clareza, com figuras e demonstrações. Apresentando diversos exemplos onde a teoria de renovação é aplicada de forma prática e realista na modelagem de problemas do cotidiano, reforça-se sua utilidade em diversas áreas ao contemplar, por exemplo, estimativas de durabilidade de aparelhos eletrônicos, estudo de filas e desempenho de sistemas e máquinas.

Para a última seção dessa pesquisa, escolheu-se abordar o tópico de simulações, modelando em Python cenários onde a teoria se aplica, a fim de obter medidas de longo prazo dos processos e esclarecer comportamentos probabilísticos por meio de gráficos e listas, ampliando, assim, o escopo aplicado-computacional do projeto.

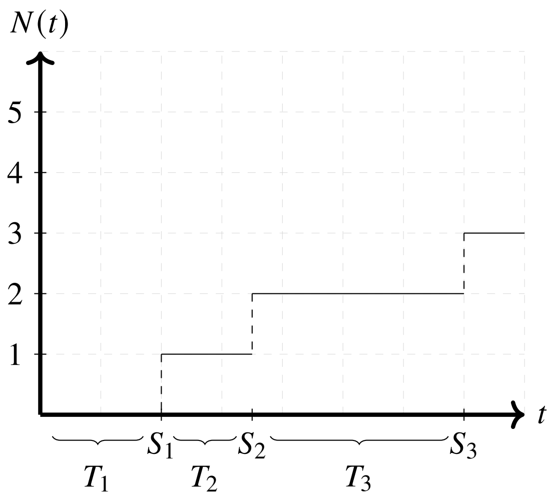


Figura 1: Representação de um processo de renovação genérico e exemplo de figura utilizada na pesquisa.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

O projeto contemplou os seguintes tópicos:

- Definições e Teoremas Limites
- Processos de Renovação com Recompensa
- Aparecimento de Padrões
- Filas
- Processos Semimarkovianos
- Simulações

Por meio da utilização de referências bibliográficas como Ross (1996), Durrett (2016) e Kulkarni (2011), tornou-se possível uma abordagem detalhada dos tópicos acima, resultando em uma pesquisa com seções compostas, em linhas gerais, pela seguinte estrutura: *Introdução da Teoria, Teoremas e Demonstrações, Exemplos*. A teoria e suas demonstrações contribuem para a fixação do conteúdo abordado, ao buscar uma visão intuitiva do que é realizado matematicamente, ao passo que os exemplos asseguram a exposição da utilidade prática desse conteúdo em situações reais.

Exemplo 11. (Padrão com sobreposição e probabilidades distintas). Considere uma variável aleatória X_n tal que $P\{X_n = i\} = p_i$. Deseja-se encontrar a esperança e a variância de T para o padrão (4, 1, 0, 3, 2, 4, 1). Primeiro, pode-se perceber que $p = p_4^2 p_1^2 p_0 p_3 p_2$ e $k = 2$. Com isso,

$$E[I(7) \cdot I(12)] = p_4^2 p_1^3 p_0^2 p_3^2 p_2^2$$
$$E[I(7) \cdot I(13)] = 0$$

A segunda igualdade vale 0 uma vez que, caso a sequência seja completa no tempo $T = 7$, os primeiros dois termos de sua segunda ocorrência já estarão presentes. Assim, se a segunda sequência continuar corretamente, ela acaba em $T = 12$, enquanto no melhor cenário após um erro - isto é, quando um número diferente de 0 é produzido no oitavo termo, mas os seguintes são corretos - ela acaba somente em $T = 15$. Ou seja, em ambos os casos a sequência não pode acabar, também, em $T = 13$. Raciocínio semelhante é utilizado para justificar que, se o padrão ocorre em $T = 13$, ele não pode ter ocorrido em $T = 7$. O exemplo é ilustrado na Figura 2.

4	1	0	3	2	4	1	0	3	2	4	1

4	1	0	3	2	4	1	X	4	1	0	3	2	4	1

Figura 2: Sobreposição sem erros: 12 termos. Falha na sobreposição: ao menos 15 termos.

Figura 2: Trecho da pesquisa abordando um conteúdo apresentado por meio de um exemplo. O estímulo da intuição e da visualização são recorrentes ao longo do projeto.

Por fim, para as simulações foram implementados dois algoritmos: um para o funcionamento de duas filas em paralelo, outro para o patrimônio de uma companhia de seguros em função do tempo de operação. A parte teórica teve como base os modelos apresentados no Capítulo 7 de Ross (2023). Essencialmente, ambos os algoritmos precisam dos seguintes parâmetros: um tempo máximo de operação e taxas — por exemplo, quantos clientes chegam na loja por hora, para o modelo de filas, e quantos acionamentos de seguro são realizados por dia, para o modelo de seguradora — para as distribuições das variáveis aleatórias utilizadas na modelagem.

Variando os parâmetros anteriores e muitos outros definidos em seus contextos específicos e detalhados na pesquisa, obtêm-se resultados distintos nas simulações, permitindo uma melhor compreensão do comportamento de cada sistema, sobretudo no longo prazo, ao rodar as simulações múltiplas vezes e armazenar seus resultados. Os algoritmos também retornam listas e gráficos contendo a evolução do sistema ao longo do tempo, como representado nas Figuras 3 e 4.

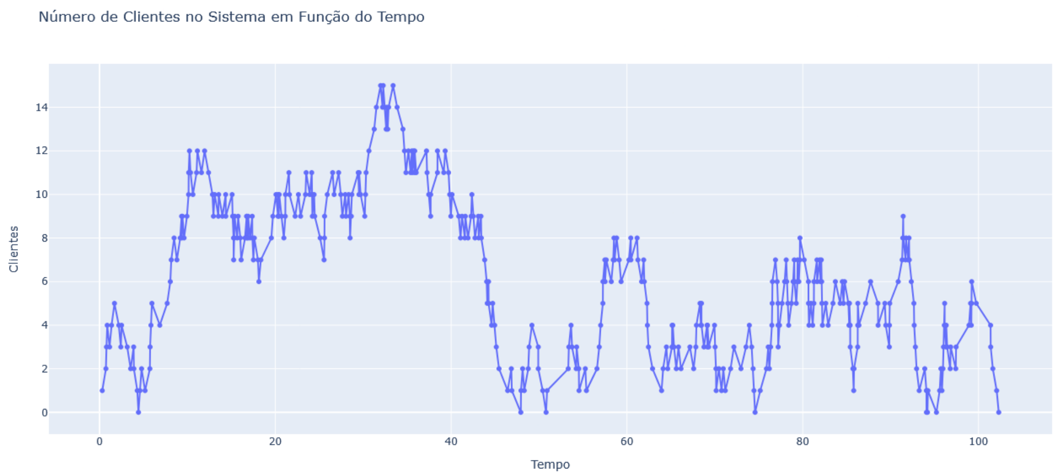
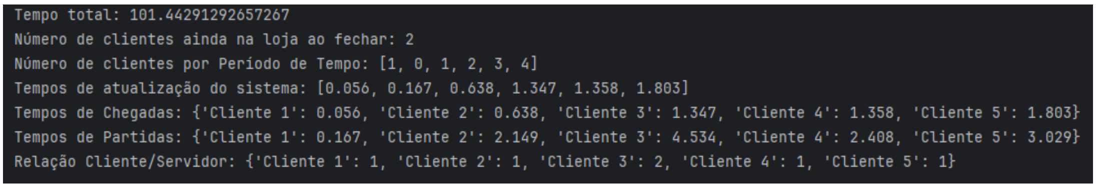


Figura 3: Exemplo de gráfico gerado pelos algoritmos.



```
Tempo total: 101.44291292657267
Número de clientes ainda na loja ao fechar: 2
Número de clientes por Período de Tempo: [1, 0, 1, 2, 3, 4]
Tempos de atualização do sistema: [0.056, 0.167, 0.638, 1.347, 1.358, 1.803]
Tempos de Chegadas: {'Cliente 1': 0.056, 'Cliente 2': 0.638, 'Cliente 3': 1.347, 'Cliente 4': 1.358, 'Cliente 5': 1.803}
Tempos de Partidas: {'Cliente 1': 0.167, 'Cliente 2': 2.149, 'Cliente 3': 4.534, 'Cliente 4': 2.408, 'Cliente 5': 3.029}
Relação Cliente/Servidor: {'Cliente 1': 1, 'Cliente 2': 1, 'Cliente 3': 2, 'Cliente 4': 1, 'Cliente 5': 1}
```

Figura 4: Exemplo de retorno do algoritmo no console

CONCLUSÕES:

O projeto permitiu contemplar detalhadamente os seguintes tópicos: *Definições e Teoremas Limites, Processos de Renovação com Recompensa, Aparecimento de Padrões, Filas, Processos Semimarkovianos* e *Simulações*. Para cada seção da pesquisa, foi adotado um padrão de introdução da respectiva teoria, seguida de demonstrações de teoremas e exemplos, para garantir uma estrutura didática sequencial e compreensiva, construindo assim o conhecimento de cada tópico a partir do anterior e culminando em exemplos onde se veem aplicações reais. Figuras e gráficos ao longo da pesquisa contribuíram, quando possível, para um maior esclarecimento do conteúdo abordado, buscando tornar a teoria mais intuitiva e visualizável.

Além disso, o projeto pôde trazer uma abordagem computacional da teoria, ao contemplar a implementação de dois algoritmos para simulação de filas paralelas e do capital de uma seguradora. Por meio da alteração de parâmetros dessas simulações — como taxas de chegada/saída, custo médio de serviço, tempo máximo de operação, etc. — os algoritmos são capazes de gerar diversos cenários distintos e registrar suas evoluções temporais para posterior análise. Analogamente à parte teórica, a visualização do conteúdo a partir de gráficos e listas foi estimulada e contribuiu para uma melhor interpretação do funcionamento dos sistemas simulados, seja em apenas uma iteração do algoritmo ou em múltiplas iterações, com o intuito de reconhecer padrões a longo prazo.

REFERÊNCIAS

R. Durrett. *Essentials of stochastic processes.* Springer Texts in Statistics. Springer, Cham, 3 ed., 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-45614-0.

V. G. Kulkarni. *Introduction to modeling and analysis of stochastic systems.* Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2 ed., 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-1772-0.

S. M. Ross. *Simulation.* Academic Press, New York, 6 ed., 2023. DOI: 10.1016/C2020-0-00043-5.

S. M. Ross. *Stochastic processes.* Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2 ed., 1996.