

Análise de Pórticos de Euler-Bernoulli com seções transversais variáveis através do Método dos Elementos Finitos

Palavras-Chave: Elementos Finitos, Pórticos, MEF

Autores:

Vitor Ramos Vasques, FEM – UNICAMP

Prof. Dr. Carlos H. Daros (orientador), FEM - UNICAMP

1 INTRODUÇÃO

Prever deslocamentos, forças e tensões atuantes em uma determinada estrutura é algo imprescindível na engenharia. Em qualquer projeto estrutural, é necessário observar como ele se comporta às solicitações para garantir a confiabilidade e a segurança do que está sendo projetado.

Quando se trata de geometrias simples, como barras, eixos e vigas, as equações constitutivas se mostram eficientes. Porém, à medida que a complexidade da forma vai aumentando, essas equações deixam de ser úteis. O método do trabalho virtual aparece como coadjuvante nas análises; ele permite desde análises estruturais simples a complexas, com carregamentos diversos. No entanto, seu uso, por si só, torna-se extremamente trabalhoso quando se busca uma abordagem geral da peça.

O Método dos Elementos Finitos surge como uma possibilidade viável. Ele propõe a divisão de uma figura complexa em pequenos pedaços, denominados elementos finitos, possibilitando a realização de análises para cada um desses pedaços e tornando viável uma solução antes difícil ou até impossível. Diversas empresas oferecem softwares de análise de elementos finitos, possibilitando ao projetista obter resultados impressionantes com poucos cliques. Mas, para operar tais programas, os fundamentos da base do método são imprescindíveis. Quando se trata de soluções numéricas, é necessária uma análise crítica dos resultados para identificar possíveis brechas para erros numéricos, que podem surgir de diversas situações, como, por exemplo, aproximações.

O resumo adiante oferece uma visão do princípio do método, possibilitando a compreensão de onde surgem as equações a serem resolvidas. O método é derivado a partir da teoria de Euler-Bernoulli, atrelada ao uso do cálculo variacional para a solução de funcionais provenientes da conservação de energia.

2 METODOLOGIA

O desenvolvimento do projeto baseou-se inicialmente no estudo do princípio dos métodos energéticos, com o objetivo de compreender os princípios de energia potencial e energia interna atuantes em estruturas mecânicas. Em seguida, estudou-se a derivação do princípio do trabalho virtual, com a realização de exercícios práticos. Na sequência, abordou-se o princípio do cálculo variacional, com foco na resolução de funcionais, na derivação do método de Rayleigh-Ritz e do método de Galerkin, com a resolução de exercícios estruturais utilizando esses dois últimos princípios.

Concluída a base teórica, iniciou-se o estudo do Método dos Elementos Finitos em uma dimensão, analisando seus fundamentos, sua generalização, rotações dos sistemas, funções aproximadoras de deslocamento, matriz de rigidez e cargas nodais equivalentes.

Foi desenvolvido um projeto complementar utilizando o MEF para vigas, incluindo a derivação da matriz de rigidez e das cargas nodais equivalentes, a realização das análises numérica e analítica, e uma discussão para a compreensão do método.

Posteriormente, realizou-se a análise para pórticos com seções variáveis, com a derivação de sua matriz de rigidez e a montagem do programa final no ambiente MATLAB neste resumo apresentado.

Durante todo o processo, foram realizadas reuniões quinzenais com o orientador para a avaliação dos resultados, discussão de dúvidas e apresentação dos avanços por meio de slides.

Para a montagem dos resultados finais, utilizaram-se os softwares MATLAB (para resolução das matrizes e geração de gráficos) e Wolfram Mathematica (para resolução simbólica). Destaca-se ainda o uso pontual de inteligência artificial como ferramenta auxiliar em tarefas repetitivas ou demoradas, como a busca de recursos em documentações oficiais de softwares e o refinamento de pesquisas sobre temas que surgiram durante o projeto.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a análise final, verifica-se o comportamento da seguinte estrutura parametrizada, apresentada na Figura 1:

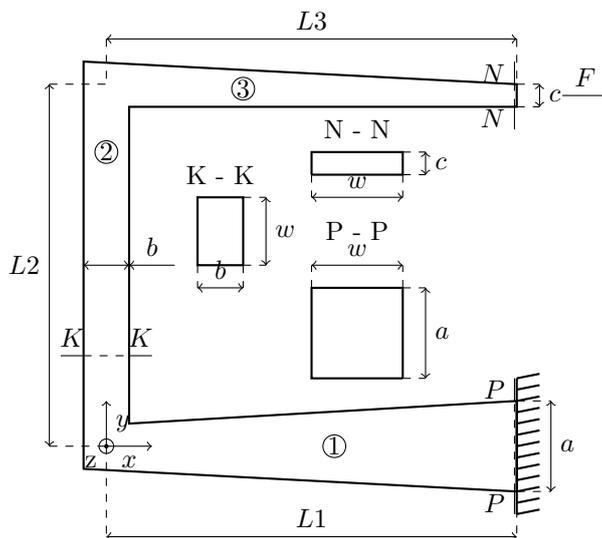


Figura 1: Estrutura de Análise

3.1 Método analítico de validação

Realiza-se a análise estática para encontrar as reações no engaste e a análise pelo método do trabalho virtual para encontrar o deslocamento da face de aplicação da força \vec{F} , com o intuito de servir como validação para o programa de elementos finitos que será criado.

Para isso, realizam-se os seguintes passos:

1. Encontra-se a função linear que representa a variação da altura das partes 1 e 3, $h_i(x)$, com i representando o elemento 1 ou 3.
2. Encontra-se a função da área $A_i(x) = w \cdot h_i(x)$ e a função do momento de inércia $I_i(x) = [w \cdot h_i^3(x)]/12$ das partes 1 e 3, bem como a área e o momento de inércia constantes da parte 2: $A_2 = w \cdot b$, $I_2 = b \cdot w^3/12$.
3. Insere-se uma força virtual $\delta\vec{P}$ na mesma direção e sentido da força \vec{F} e realiza-se a análise estática, seguida da análise do método das seções. Os resultados serão análogos para ambos os casos, devido ao sentido e direção das forças serem os mesmos.
4. Realiza-se a análise do trabalho virtual externo δW_e . Como o desejado é o deslocamento na direção x na face de aplicação da força, o trabalho virtual externo é dado pela força virtual $\delta\vec{P}$ multiplicado pela distância real $\vec{x} = (x, 0)$ que a peça se moverá devido a força real \vec{F} .
5. Realiza-se a análise do trabalho virtual interno δW_i , considerando apenas as tensões devidas à força normal e ao momento fletor. Desta forma, o trabalho virtual interno será dado pela soma da análise das três partes principais da peça seguindo a expressão da Equação 1:

$$\int_0^L \frac{F \cdot \delta F}{A \cdot E} + \frac{M \cdot \delta M}{EI} dx \quad (1)$$

Onde F , δF , M , δM são as forças e momentos internos (calculados pelo método das seções) devido a força real \vec{F} e virtual $\delta\vec{P}$ aplicado a peça.

6. Aplica-se a definição de trabalho virtual: trabalho virtual interno igual ao trabalho virtual externo, $\delta W_i = \delta W_e$.

Por fim, obtêm-se os resultados:

Para as reações no engaste:

$$R_x = -F \mid R_y = 0 \mid M_z = F \cdot L_2 \quad (2)$$

Para o deslocamento horizontal x na face de aplicação da força:

$$x = F \cdot \left[\frac{4 \cdot L_2^3}{b \cdot w^3 \cdot E} + \frac{L_1 \cdot \left(\frac{6 \cdot (a+b) \cdot L_2^2}{a^2 \cdot b^2} + \frac{\ln(a/b)}{a-b} \right)}{w \cdot E} + \frac{L_3 \cdot \ln(b/c)}{b \cdot w \cdot E - c \cdot w \cdot E} \right] \quad (3)$$

O deslocamento x será expresso em metros, desde que todas as unidades utilizadas estejam no sistema internacional, o módulo de elasticidade E em Pascal (Pa) e a força F em Newton (N).

3.2 Resultados Numéricos

Para montar o programa de Elementos Finitos, inicialmente deriva-se a matriz de rigidez para os elementos em questão. Adota-se um elemento genérico, variando sua altura conforme indicado na Figura 2.

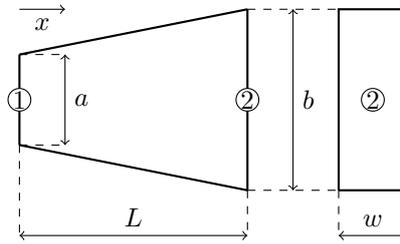


Figura 2: Elemento de genérico de seção variada

Para esta forma, adotam-se duas funções de forma: uma para o deslocamento transversal $v_f(x)$, um polinômio de terceiro grau, e outra para o deslocamento longitudinal $u_f(x)$, um polinômio de primeiro grau, aplicam-se as condições de contorno considerando os deslocamentos e rotações dos nós 1 e 2. Por procedimento similar ao já descrito anteriormente, encontram-se a função da área $A_f(x)$ e a função de momento de inércia $I_f(x)$.

Determina-se a energia interna U , somando-se as energias decorrentes da ação de barra e de viga, conforme mostrado na Equação 4.

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L A(x) \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{E}{2} \int_0^L I(x) \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

Em seguida, a energia potencial V é determinada aplicando forças e momentos genéricos aos nós 1 e 2 e multiplicando-os pelos seus deslocamentos, como mostrado na Equação 5.

$$V = F_{x1} \cdot u1 + F_{y1} \cdot v1 + M_1 \cdot \theta_1 + F_{x2} \cdot u2 + F_{y2} \cdot v2 + M_2 \cdot \theta_2 \quad (5)$$

O funcional $\Pi = U - V$ é montado, e sua minimização é realizada como mostrado na Equação 6.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial v_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0 \quad (6)$$

Ao adotar a notação matricial, encontra-se o sistema $\mathbf{K} \cdot \vec{x} = \vec{r}$ com:

- \mathbf{K} a matriz de rigidez para elementos retangulares variando linearmente a altura mostrada na Equação 7 com a , b , L dimensões conforme esquematizada na Figura 2 e E representando o módulo de elasticidade do material.
- \vec{x} os deslocamentos nodais $[u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2]^T$.
- \vec{r} as cargas nodais equivalentes $[F_{x1}, F_{y1}, M_1, F_{x2}, F_{y2}, M_2]^T$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{(a+b)wE}{2L} & 0 & 0 & -\frac{(a+b)wE}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7a^3wE}{20L^3} + \frac{3a^2bwE}{20L^3} + \frac{3ab^2wE}{20L^3} + \frac{7b^3wE}{20L^3} & \frac{a^3wE}{4L^2} + \frac{a^2bwE}{10L^2} + \frac{ab^2wE}{20L^2} + \frac{b^3wE}{10L^2} & 0 & -\left(\frac{7a^3wE}{20L^3} + \frac{3a^2bwE}{20L^3} + \frac{3ab^2wE}{20L^3} + \frac{7b^3wE}{20L^3}\right) & \frac{a^3wE}{10L^2} + \frac{a^2bwE}{20L^2} + \frac{ab^2wE}{10L^2} + \frac{b^3wE}{4L^2} \\ 0 & \frac{a^3wE}{4L^2} + \frac{a^2bwE}{10L^2} + \frac{ab^2wE}{20L^2} + \frac{b^3wE}{10L^2} & \frac{11a^3wE}{60L} + \frac{a^2bwE}{12L} + \frac{ab^2wE}{30L} + \frac{b^3wE}{30L} & 0 & -\left(\frac{a^3wE}{4L^2} + \frac{a^2bwE}{10L^2} + \frac{ab^2wE}{20L^2} + \frac{b^3wE}{10L^2}\right) & \frac{a^3wE}{15L} + \frac{a^2bwE}{60L} + \frac{ab^2wE}{60L} + \frac{b^3wE}{15L} \\ -\frac{(a+b)wE}{2L} & 0 & 0 & \frac{(a+b)wE}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{7a^3wE}{20L^3} + \frac{3a^2bwE}{20L^3} + \frac{3ab^2wE}{20L^3} + \frac{7b^3wE}{20L^3}\right) & -\left(\frac{a^3wE}{4L^2} + \frac{a^2bwE}{10L^2} + \frac{ab^2wE}{20L^2} + \frac{b^3wE}{10L^2}\right) & 0 & \frac{7a^3wE}{20L^3} + \frac{3a^2bwE}{20L^3} + \frac{3ab^2wE}{20L^3} + \frac{7b^3wE}{20L^3} & -\left(\frac{a^3wE}{10L^2} + \frac{a^2bwE}{20L^2} + \frac{ab^2wE}{10L^2} + \frac{b^3wE}{4L^2}\right) \\ 0 & \frac{a^3wE}{10L^2} + \frac{a^2bwE}{20L^2} + \frac{ab^2wE}{10L^2} + \frac{b^3wE}{4L^2} & \frac{a^3wE}{15L} + \frac{a^2bwE}{60L} + \frac{ab^2wE}{60L} + \frac{b^3wE}{15L} & 0 & -\left(\frac{a^3wE}{10L^2} + \frac{a^2bwE}{20L^2} + \frac{ab^2wE}{10L^2} + \frac{b^3wE}{4L^2}\right) & \frac{a^3wE}{30L} + \frac{a^2bwE}{30L} + \frac{ab^2wE}{12L} + \frac{11b^3wE}{60L} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Com a matriz de rigidez derivada, é possível montar o programa de cálculo. Adotam-se 9 elementos, sendo 3 para cada parte da Figura 1. O programa substitui os valores parametrizados da Figura 1 por: $a = 0,03$ [m]; $b = 0,02$ [m]; $c = 0,01$ [m]; $w = 0,02$ [m]; $L_1 = L_2 = L_3 = 0,35$ [m]; $F = 300$ [N] e $E = 205 \cdot 10^9$ [Pa].

É montada uma matriz de rigidez para cada elemento, seguindo um sistema local. Cada matriz, inicialmente montada no sistema local, é rotacionada para o sistema global e posicionada na matriz de rigidez global na posição adequada. A carga aplicada é posicionada no vetor de cargas nodais equivalentes na posição adequada e, por fim, aplicam-se as condições de contorno do engaste, resolvendo o sistema para encontrar os deslocamentos nodais \vec{x} .

Esses deslocamentos são rotacionados novamente para seus eixos locais e, dessa forma, aplicam-se as funções de forma que permitem encontrar os deslocamentos $u(x)$ e $v(x)$ ao longo dos elementos, bem como as forças normais $N(x)$ e os momentos fletores $M(x)$ de cada elemento apresentados na Equação 10, não foram analisados esforços de cisalhamento.

Os deslocamentos $u(x)$ e $v(x)$ são novamente rotacionados para o eixo global e plotados, gerando o deslocamento da peça devido à força aplicada, conforme indicado na Figura 3. Com os momentos e forças normais, são calculadas as tensões máximas atuantes em cada elemento, por meio da equação:

$$\sigma(x) = \left| \frac{N(x)}{A(x)} \right| + \left| \frac{M(x) \cdot (h(x)/2)}{I(x)} \right| \quad (8)$$

gerando, assim, as tensões apresentadas na Figura 4.

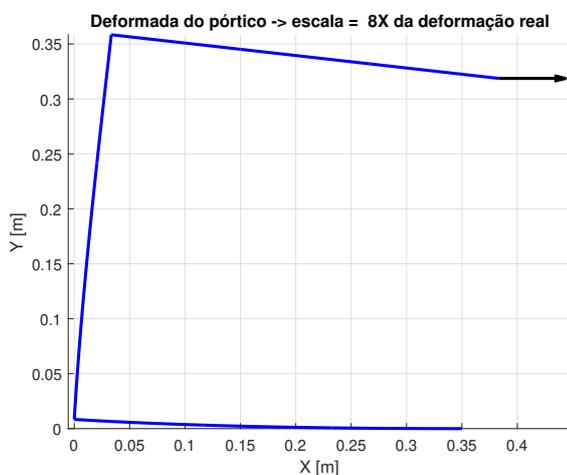


Figura 3: Deformação ao longo do eixo neutro da peça

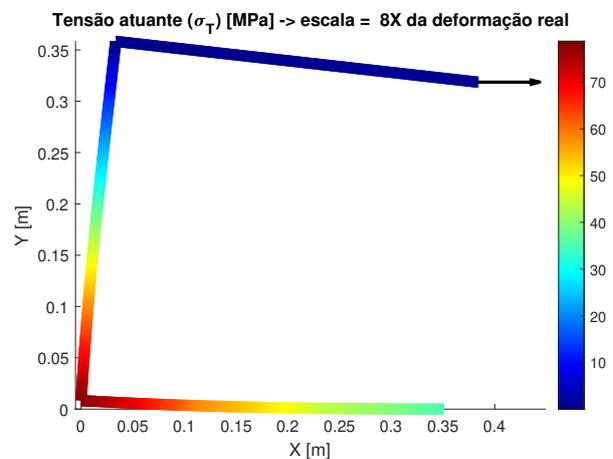


Figura 4: Maior tensão atuante na peça

A validação do programa envolve observar as forças de reação no engaste fornecidas pelo programa numérico e compará-las com as forças calculadas pela estática, além de aplicar a equação obtida pelo trabalho virtual e compará-la com o deslocamento nodal na direção x do nó onde foi aplicada a força.

Para este caso, a solução numérica da deformação em x na face de aplicação da força converge em 6 casas decimais com a solução analítica feita pelo trabalho virtual apresentada na Equação 3, enquanto as reações no engaste convergem com um erro de 10^{-11} com a solução estática, gerando:

$$x = 0.0042 \text{ [m]} \mid R_x = -300 \text{ [N]} \mid R_y = 0 \mid M_z = 105 \text{ [N.m]} \quad (9)$$

Com o programa validado, é possível analisar tensões e deformações para uma infinidade de figuras semelhantes à apresentada na Figura 1, bastando apenas modificar os valores parametrizados ou aplicar forças e momentos em locais diferentes da peça.

4 CONCLUSÕES

A análise de resultados de Elementos Finitos está diretamente ligada à malha adotada. Para obter deslocamentos, poucos elementos podem ser satisfatórios. Observa-se que as funções de forma dos deslocamentos longitudinais $u(x)$ e transversais $v(x)$, de primeiro e terceiro grau respectivamente, trazem uma boa aproximação para os pontos internos dos elementos. Porém, maior cuidado deve ser tomado quando se derivam essas expressões. Para obter-se força normal, momento fletor e força de cisalhamento ao longo do elemento, as funções de forma são derivadas conforme apresentado a seguir na Equação 10.

$$N(x) = E \cdot A(x) \cdot u'(x) \mid M(x) = E \cdot I(x) \cdot v''(x) \mid V(x) = E \cdot I(x) \cdot v'''(x) \quad (10)$$

Nota-se uma perda de grau de $u(x)$ e $v(x)$. Além disso, em casos de área variável, Para obter a força normal e momento, as funções da área e do momento de inércia serão multiplicadas às funções de deslocamento, podendo corromper o resultado. Com isso, os cálculos de tensão diretamente dependentes dessas funções, como mostrado na Equação 8, podem não ser fidedignos aos valores reais.

Em casos de carregamentos distribuídos sobre o elemento ou forças atuando fora dos nós (não tratados neste resumo), é crucial notar que as cargas nodais equivalentes serão uma média ponderada do carregamento sobre o elemento, o que pode gerar discrepâncias nos valores nodais analisados.

A melhora na resolução dos resultados vem com o aprimoramento da malha, utilizando-se mais elementos, de forma que o intervalo entre eles seja pequeno o suficiente para que os erros, devido à perda de resolução das derivadas das funções de forma ou das médias ponderadas de forças localizadas fora dos nós, sejam irrelevantes. Para obter bons resultados, deve-se realizar uma análise prévia das forças envolvidas e do que se deseja analisar, a fim de criar um programa com a quantidade adequada de elementos e nos locais corretos. Conferências com soluções analíticas, mesmo que pontuais, ou até mesmo testes experimentais para validação da análise, podem ser relevantes para obter um programa refinado e análises bem desenvolvidas.

5 BIBLIOGRAFIA

MATHWORKS. *MATLAB*. Disponível em: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Acesso em: 25 jul. 2025.

POPOV, Egor Paul. *Introduction to Mechanics of Solids*. 1. ed. [S.l.]: Pearson College Div, 1968. 1125 p. ISBN 978-0134877693.

SAVASSI, W. *Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Análise Linear de Estruturas*, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 1996

VASQUES, Vitor Ramos; DAROS, Carlos H. *Análise de Pórticos de Euler-Bernoulli através do Método dos Elementos Finitos*. In: **XXXI CONGRESSO NACIONAL DE ESTUDANTES DE ENGENHARIA MECÂNICA (CREEM 2025)**, 2025, São Carlos, SP. Trabalho aceito para apresentação oral. 29 set.–03 out. 2025. A ser publicado.

WOLFRAM. *Mathematica*. Disponível em: <https://www.wolfram.com/mathematica/>. Acesso em: 25 jul. 2025.

Este resumo contou com a utilização de ferramentas de inteligência artificial exclusivamente para revisão ortográfica e adequação às normas cultas da língua portuguesa. Todo o conteúdo apresentado é de autoria exclusiva do autor, que assume plena responsabilidade por sua elaboração.

6 AGRADECIMENTOS

O resumo aqui apresentado contou com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por meio da concessão de bolsa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação (PIBITI).