Coordenadas de Fenchel-Nielsen e o Teorema de Teichmüller

Lucca Delboni(Aluno), Henrique Sá Earp (Orientador) — IMECC, UNICAMP

Palavras-chave: Teorema de Teichmüller, Fenchel-Nielsen, Espaço de Teichmüller, Geometria Hiperbólica.

Objetivos da pesquisa

Esta iniciação científica teve como objetivo principal introduzir o autor aos conceitos e às ferramentas geométricas clássicas, no que concerne as superfícies de Riemann Compactas. Para a apresentação nesse congresso, foi escolhido o tema das coordenadas de Fenchel-Nielsen e, como consequência, o teorema de Teichmüller.

Fundamentação teórica e metodologia

Na pesquisa, abordamos o teorema de Teichmüller de duas formas distintas. A primeira, é uma maneira mais analítica. Mostramos que o espaço de Teichmüller é isomorfo ao espaço vetorial de diferenciais quadráticos holomorfos. A segunda, mais geométrica, mostramos que o espaço de Teichmüller está em bijeção com

$$\mathbb{R}^{3p-3}_{>0} \times \mathbb{R}^{3p-3},$$

via coordenadas de Fenchel-Nielsen.

Definições e lemas

Definição 0.1. *Dada uma superfície Λ suave, orientável e de gênero $p \geq 2$, e uma estrutura conforme g em Λ, dizemos que o difeomorfismo*

$$f : \Lambda \to (\Lambda, g)$$

é a marca da superfície de Riemann (Λ, g).

O espaço de Teichmüller $\mathcal{T}_p$ é o espaço de classes de equivalência de superfícies de Riemann marcadas em que $(\Lambda, g, f) \sim (\Lambda, h, f')$ se existe biholomorfismo (no caso de $p \geq 2$, é equivalente a uma isometria)

$$k : (\Lambda, g) \to (\Lambda, h)$$

tal que $k \circ f$ é homotópica a f'. Uma marca de uma superfície de Riemann, é completamente definida pela imagem de um sistemas de curva.

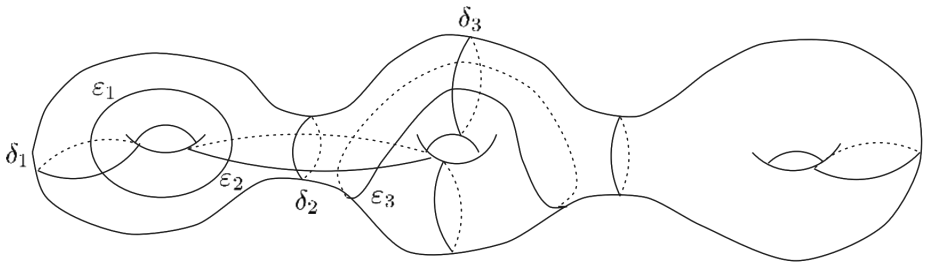

Figura 1: Sistemas de curva

Observação 0.2. *É interessante notar que, mesmo que duas superfícies de Riemann sejam isométricas, elas podem não representar o mesmo ponto no espaço de Teichmüller. Um exemplo disso é o dito torção de Dehn:*

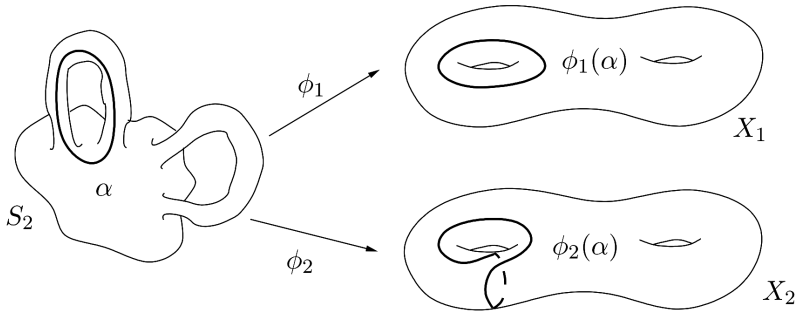

Figura 2: Torção de Dehn: a diferença entre as marcas das superfícies é uma torção da curva $\phi_1(\alpha)$ em torno de uma ortogonal à ela.

Tome uma superfície S_2 suave, orientável e de gênero $p \geq 2$. Sejam $X_1 = (S_2, g)$ e $X_2 = (S_2, h)$ com g e h representando uma mesma estrutura conforme em S_2. Sejam, também, ϕ_1, ϕ_2 marcas das superfícies de Riemann X_1 e X_2. Suponha que existe isometria

$$k : (\Lambda, g) \to (\Lambda, h).$$

Sejam c_1 e c_2 as únicas geodésicas homotópicas às curvas $\phi_1(\alpha)$ e $\phi_2(\alpha)$. Então,

$$[k(c_1)] = [k(\phi_1(\alpha))] = [\phi_2(\alpha)] = [c_2].$$

Como k é isometria, o comprimento de c_1 é o mesmo de c_2, o que é um absurdo. Desse modo, (X_1, ϕ_1) não é equivalente a (X_2, ϕ_2).

Definição 0.3. *Um par de calças é um domínio homeomorfo ao conjunto $S \subset \mathbb{C}$ definido por*

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ \left|z - \tfrac{1}{2}\right| \geq \tfrac{1}{4},\ \left|z + \tfrac{1}{2}\right| \geq \tfrac{1}{4} \right\},$$

e equipado com uma métrica hiperbólica tal que o bordo é formado por geodésicas.

Utilizando um teorema existência de geodésicas internas aos pares de calça e um de unicidade de hexágonos hiperbólicos demonstramos que:

Teorema 0.4. *A estrutura conforme do domínio de três círculos é unicamente determinada pelos comprimentos l_1, l_2, l_3 das curvas geodésicas de seu bordo. Reciprocamente, dados $l_1, l_2, l_3 > 0$, existe um único domínio de três círculos com essas bordas.*

Para o que segue, dois lemas são necessários:

Lema 0.5. *Seja (Λ, g) uma superfície de Riemann e $\gamma : S^1 \to (\Lambda, g)$ uma curva fechada suave. Então, existe única geodésica em (Λ, g) homotópica a γ.*

Lema 0.6. *Sejam S_1, S_2 superfícies munidas de métrica hiperbólica, com bordos dado pelas curvas c_1, c_2 (geodésicas com respeito à métrica) respectivamente, de tal modo que o comprimento das curvas é idêntico.*

Podemos, então, obter uma superfície S colando S_1, S_2. I.e. identificamos c_1 e c_2 com respeito a um ponto inicial.

Além disso, essa nova superfície é munida de métrica hiperbólica tal que a restrição a S_i é a métrica hiperbólica original de S_i $(i = 1, 2)$.

Observação 0.7. *Sabemos que a estrutura conforme de um par de calças é completamente determinada pelos comprimentos das geodésicas de bordo. Agora, a superfície obtida pela colagem de dois pares de calças, tem estrutura conforme completamente determinada pelos comprimentos das geodésicas de bordo e pelo parâmetro de torção obtido da colagem.*

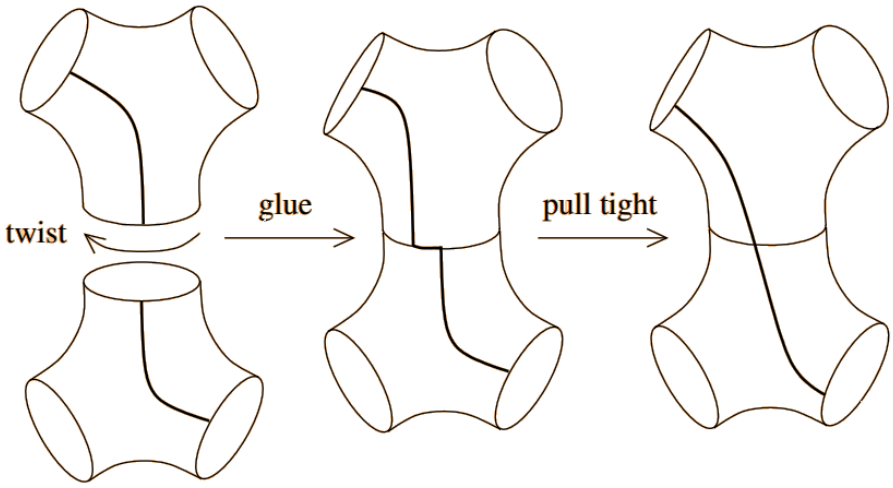

Figura 3: Como a torção afeta o comprimento de arcos geodésicos. Note que a métrica da superfície também depende da torção na colagem.

Construção das coordenadas de Fenchel-Nielsen

Dada uma superfície compacta orientável Λ de gênero $p \geq 2$, escolhemos um sistema de curvas como o da figura 1. Dada uma estrutura conforme g e uma marca f, definida pelas imagens $f(\delta_i)$ e $f(\varepsilon_i)$, $\forall 1 \leq i \leq 3p - 3$, sabemos que existem únicas geodésicas homotópicas a $f(\delta_i), 1 \leq i \leq 3p - 3$ em (Λ, g). Cortamos a superfície ao longo de tais geodésicas, como na figura abaixo.

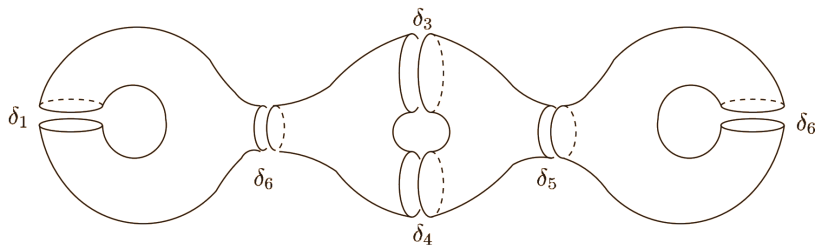

Figura 4: Decomposição de uma superfície de gênero 2 em pares de calças.

Obtemos, dessa forma, $2p-2$ pares de calças e $3p-3$ geodésicas de bordo. Os comprimentos das geodésicas de bordo são ditos parâmetros de comprimento, e determinam um mapa:

$$(l_1, ..., l_{3p-3}) : \mathcal{T}_p \to \mathbb{R}^{3p-3}_{>0}.$$

Esse mapa é bem definido pois, se $(\Lambda, g, f) \sim (\Lambda, h, f')$, então, existe isometria $k : (\Lambda, g) \to (\Lambda, h)$, de modo que se c_i^f é a geodésica em (Λ, g) homotópica a $f(\delta_i)$ e $c_i^{f'}$, é a gepdésica em (Λ, h) homotópica a $f'(\delta_i)$, temos que:

$$[k(c_i^f)] = [k(f(\delta_i))] = [f'(\delta_i)] = [c_i^{f'}],$$

de modo que o comprimento de c_i^f é idêntico ao de $c_i^{f'}$. Assim, os parâmetros de comprimento são idênticos.

Observe que as curvas da forma $f(\varepsilon_i)$ são, ou homotópicas a uma geodésica interior ao par de calças unida com um arco geodésico sobre o bordo desse mesmo par de calças, como na figura

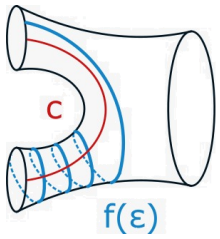

Figura 5: Caso 1

ou homotópicas a uma geodésica (à esquerda, em vermelho), unida a um arco sobre o bordo, unida a uma geodésica (à direita, em vermelho), unida a um arco sobre o bordo. É fácil ver que o comprimento desses arcos são os mesmos.

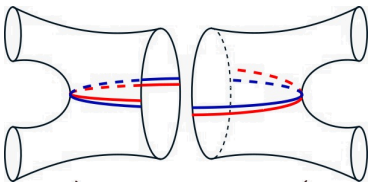

Figura 6: Caso 2

O comprimento desses arcos sobre as geodésicas de bordo são ditos parâmetros de torção, e definem o mapa:

$$(\theta_1, ..., \theta_{3p-3}) : \mathcal{T}_p \to \mathbb{R}^{3p-3}.$$

Esse mapa é bem definido pelo mesmo motivo ($\mod 2\pi$) da boa definição dos parâmetros de comprimento. Contudo, como mapas que se diferenciam por uma torção de Dehn não representam o mesmo ponto no espaço de Teichhmüller, segue que os parâmetros de torção são bem definidos.

Resultados e conclusão

Através da construção das coordenadas de Fenchel-Nielsen, somos capazes de mostrar:

Teorema 0.8 (Teichmüller)**.** *O espaço de Teichmüller está em bijeção com*

$$\mathbb{R}_{>0}^{3p-3} \times \mathbb{R}^{3p-3}.$$

Note que, juntando as abordagens mencionadas, somos capazes de concluir que o espaço vetorial de diferenciais quadráticos holomorfos tem dimensão (complexa) $3p-3$.

Além disso, observe que fizemos algumas escolhas no caminho, e.g. sistema de curvas. Contudo, é possível demonstrar que a bijeção acima é independente das escolhas feitas. Dessa forma, a terminologia **Espaço** de Teichmüller é justificada, pois podemos induzir topologia em $\mathcal{T}_p$.