INTRODUÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS E PRECIFICAÇÃO DE DERIVATIVOS ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO

Palavras-chave: equações de difusão; opções e derivativos; fórmula de Black-Scholes; simulação de Monte Carlo

Autores(as):
Guilherme Valverde Freiria, IMECC – UNICAMP
Prof[(a)]. Dr[(a)] Luiz K. Hotta (orientador), IMECC – UNICAMP

---

1 Introdução

A precificação de derivativos/instrumentos financeiros é um dos principais desafios da área de finanças quantitativas, especialmente diante do aumento da complexidade dos instrumentos disponíveis no mercado. Muitos desses instrumentos, como opções e outros tipos de derivativos, não possuem soluções analíticas diretas, o que torna indispensável o uso de métodos numéricos para estimar seus valores com precisão.

Neste projeto, foi investigado o uso de simulações numéricas aplicadas à precificação de opções, com ênfase na modelagem estocástica do comportamento dos ativos subjacentes. A evolução dos preços foi modelada por equações diferenciais estocásticas (EDEs), que permitem incorporar incertezas e flutuações observadas no mercado. A abordagem adotada inclui o estudo teórico de processos estocásticos, com destaque para o movimento browniano, e a aplicação prática desses modelos por meio de algoritmos de simulação como o método de Monte Carlo.

Ao longo do trabalho, foram exploradas ferramentas matemáticas fundamentais para a construção desses modelos, além de técnicas computacionais voltadas à geração de trajetórias e à análise estatística dos resultados. A proposta do projeto é fornecer uma introdução sólida aos conceitos centrais do cálculo estocástico e suas aplicações no contexto financeiro.

2 Metodologia

O projeto combina o estudo teórico de processos estocásticos com a implementação computacional de métodos numéricos para precificação de opções. A base matemática é fundamentada em Mikosch (1998). Considere que o preço de um ativo, ou uma função dele seja gerado por um processo estocástico. Um processo estocástico X é uma família de variáveis aleatórias definidas num espaço Ω, seja

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega), \tag{1}$$

onde t pertence a um conjunto $T \subset \mathbb{R}$, chamado *conjunto dos índices*, geralmente associado ao tempo (Mikosch 1998, pg. 23).

Uma abordagem frequente em finanças é considerar que os preços são modelados através de equações diferenciais estocásticas (EDEs) da forma

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + b(t, X_t)\, dB_t, \quad X_0 = Y(\omega),$$

em que a e b representam as funções de tendência (drift) e volatilidade (ruído), respectivamente (Mikosch 1998). Para a resolução dessas equações, podem ser empregadas abordagens analíticas e/ou numéricas.

A escolha das funções de tendência e volatilidade depende do ativo. Um dos modelos mais utilizado é através do movimento Browniano geométrico, cuja definição corresponde à solução da EDE:

$$dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t, \tag{2}$$

com μ e σ constantes, e sua solução analítica, obtida via o *Lema de Itô*, é:

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right]. \tag{3}$$

Dois métodos para simular trajetórias são os métodos de Euler–Maruyama e de Milstein (Mikosch 1998). No primeiro método, as trajetórias são aproximadas por

$$X_T^{(n)} = X_{t_{n-1}}^{(n)} + a(X_{t_{n-1}}^{(n)})\, \Delta_n + b(X_{t_{n-1}}^{(n)})\, \Delta_n B, \tag{4}$$

enquanto na versão de Milstein as trajetória são dadas por

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)})\, \Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\, \Delta_i B + \frac{1}{2} b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\, b'(X_{t_{i-1}}^{(n)}) \left[(\Delta_i B)^2 - \Delta_i\right]. \tag{5}$$

Com base nos conceitos teóricos apresentados anteriormente e nos fundamentos de finanças discutidos em Hull (2016), esses conhecimentos podem ser aplicados na precificação de opções — derivativos financeiros cujo valor depende do comportamento de um ativo subjacente, modelado por equações diferenciais estocásticas.

As opções conferem ao titular o direito de compra (call) ou venda (put) de um ativo por um preço fixado K (strike). As opções do tipo europeia só podem ser exercidas no vencimento, enquanto as americanas permitem o exercício a qualquer momento até essa data.

A precificação busca determinar o valor justo da opção com base em parâmetros como volatilidade σ, taxa de juros r, preço inicial X_0 e tempo até o vencimento T. Esse valor é dado pelo valor esperado do *payoff* futuro, ajustado por um fator de desconto.

A função de payoff para essas opções é dada por $(X_T - K)^+ = X_T - K$ se $X_T > K$, e 0 caso contrário, onde X_T representa o valor do ativo no vencimento. No caso da opção europeia, de compra ou venda, tem-se uma solução analítica do preço da opção. No entanto, no caso de opções mais exóticas, não existindo uma solução analítica, a simulação de trajetórias é o método mais empregado, em que o valor esperado do *payoff* é dado pela média dos *payoff* das trajetórias simuladas.

Para melhorar a eficiência das estimativas os dois métodos mais utilizados de redução de variância são o uso de variáveis antitéticas e de controle; veja, por exemplo Silva (2012, seção 2.2).

3 Resultados e Discussão

Para ilustrar o método de precificação através de simulação ele é aplicado para precificar opções europeias e americanas.

3.1 Opções europeias

Como no caso das opções europeias temos uma solução analítica, podemos verificar diretamente o desempenho do método de estimação através de simulação. Como exemplo, considere uma opção de compra com os seguintes parâmetros $X_0 = 50$, $K = 45$, $\sigma = 0{,}4$, $r = 0{,}1$. O preço teórico da opção, pela fórmula de Black–Scholes, é de R$ 6,248. Na simulação considere $T = \frac{30}{252}$ (tamanho do passo Δ nas equações (4) e (5). Considerando o ano com 252 dias úteis, temos 1000 passos.) Para estudar o efeito do número de trajetórias, consideramos (100, 1000, 10000, 100000) trajetórias.

A Tabela 1 apresenta os resultados baseados em diferentes número de trajetórias. São apresentados os resultados quando as trajetórias foram geradas pelos métodos Euler–Maruyama e Milstein. Adicionalmente, as variáveis antitéticas utilizadas foram as utilizadas em Silva (2012, seção 2.2.1). Para se ter uma ideia das incertezas nas amostras dadas pelas trajetórias, em MC (MBG) consideramos amostras da distribuição verdadeira no final do período dada pela equação (3). Em MC (Antitético) são dadas as mesmas estimativas dadas em MC (MBG) quando são utilizadas variáveis antitéticas.

A análise dos resultados indica que: i) Em todos os casos as diferenças entre os valores estimados são menores do que dois erros padrões; ii) os erros padrões dos métodos de Euler-Maruayama e Milstein são próximos dos desvios padrões das estimativas MC (MBG);

iii) o método de redução de variância, que utiliza variáveis antitéticas reduz bastante o erro padrão; e iv) o método de Milstein teve desempenho ligeiramente superior ao de Euler–Maruyama.

Foi também realizado um estudo sobre o efeito tamanho dos passos, mas os resultados não são apresentados.

Tabela 1: Preços estimados da opção (em R$) por diferentes métodos e números de trajetórias. Preço teórico: R$ 6,248. Entre parênteses temos os erros padrões das estimativas do preço estimado.

Método	**Número de Trajetórias**			
	100	**1000**	**10000**	**100000**
MC (MBG)	6,441 (0,615)	6,395 (0,190)	6,210 (0,060)	6,241 (0,019)
MC (Antitético)	6,310 (0,171)	6,259 (0,060)	6,287 (0,019)	6,248 (0,006)
MC (Euler–Maruyama)	6,539 (0,563)	6,084 (0,192)	6,134 (0,059)	6,274 (0,019)
MC (Milstein)	6,046 (0,533)	6,053 (0,186)	6,287 (0,059)	6,259 (0,019)

3.2 Opções americanas

Com base em Silva (2012), apresentamos os resultados do método de Longstaff-Schwartz (LSM) para a precificação de opções americanas de venda, conforme proposto originalmente em Longstaff e Schwartz (2001). As simulações foram realizadas para a mesma opção ilustrada em Silva (2012, seção 3.2.3), isto é, com preços iniciais $X_0 = 28,\ 30,\ 32$, taxa de juros de 5% ao ano, vencimento em 1 ano, preço de exercício de 30 e volatilidades de 10%, 20% e 40%. Assim como em Silva (2012), foram utilizadas 100.000 trajetórias em cada simulação de Monte Carlo, com 50 datas de exercício e funções base de Laguerre de dimensão 4.

Foi realizado o mesmo experimento de Silva (2012, seção 3.2.3) para seleção das funções base. Para tanto, é utilizado o fato de que o preço de uma opção americana sem pagamento de dividendos coincide com o de sua correspondente europeia, que como vimos, tem solução analítica. Comparando os preços estimados pelo (LSM), constatamos que a dimensão 4 das funções de Laguerre foi suficiente para uma boa aproximação.

Como forma de verificação dos resultados obtidos pelo algoritmo implementado, foram utilizados como referência os valores apresentados na Tabela 3.3 da dissertação de Silva (2012), tanto para o método de Longstaff-Schwartz (LSM) quanto para o método binomial, ambos empregados na precificação de opções na referida obra.

Os resultados deste projeto foram comparados com os de Silva (2012, seção 3.2.3), que utilizou os métodos LSM e binomial para precificação de opções. Os valores obtidos foram próximos, como mostrado na Tabela 2, evidenciando a confiabilidade dos algoritmos implementados. Os valores obtidos pelo método binomial servem como referência, e observa-se que, em alguns casos, os resultados apresentados por Silva (2012, seção 3.2.3) são superiores aos encontrados na nossa implementação e, em outros, inferiores.

Tabela 2: Preços estimados de opções americanas pelo método de Longstaff-Schwartz com 100.000 trajetórias, para diferentes volatilidades (σ) e valores iniciais (X_0). Na coluna LSMP, estão os valores simulados; nas colunas Silva (LSM) e Binomial, os valores apresentados em Silva (2012).

σ	$X_0 = 30$			$X_0 = 28$			$X_0 = 32$		
	LSMP	**Silva**	**Binomial**	**LSMP**	**Silva**	**Binomial**	**LSMP**	**Silva**	**Binomial**
0.1	0.724	0.725	0.731	1.994	1.989	2.005	0.221	0.209	0.223
0.2	1.828	1.827	1.827	2.807	2.816	2.815	1.147	1.136	1.145
0.4	4.084	4.100	4.100	4.952	4.961	4.962	3.367	3.363	3.379

4 Conclusões

O projeto forneceu uma base sólida nos fundamentos teóricos e computacionais da modelagem estocástica de preços de ativos financeiros, abordando a aplicação do Lema de Itô para a solução analítica da EDE (movimento Browniano geométrico) e métodos numéricos de discretização, como Euler–Maruyama e Milstein.

Na precificação, utilizou-se o método de Monte Carlo para estimar o valor de opções europeias, validado pela fórmula de Black–Scholes. O uso de variáveis antitéticas foi eficaz na redução da variância, melhorando a precisão das estimativas. Para opções americanas, foi utilizado o método de Longstaff–Schwartz, que combina simulações de Monte Carlo com regressões por quadrados mínimos para estimar o exercício ótimo.

O projeto também contribuiu para o desenvolvimento da intuição financeira e da autonomia computacional. Como continuidade, propõem-se expandir o estudo para opções exóticas e aprofundar o controle estocástico, com foco em alocação ótima de portfólio.

Referências

Hull, John C (2016). *Opções, Futuros e Outros Derivativos.* 9ª ed. Porto Alegre: Bookman Editora.

Longstaff, Francis A e Eduardo S Schwartz (2001). "Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach". Em: *The Review of Financial Studies* 14.1, pp. 113–147.

Mikosch, Thomas (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View.* Singapore: World Scientific.

Silva, Bruno E. da (2012). "Opções Americanas Via Métodos de Monte Carlo". Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: Mestrado Profissional de Métodos Matemáticos Aplicados a Finanças, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Agradecimentos: Guilherme agradece à bolsa PIBIC/UNICAMP e ao seu orientador, Luiz, pelo apoio durante o desenvolvimento deste projeto. Luiz agradece pelo apoio da FAPESP, processos 2023/01728-0 e 2023/02538-0.