

# ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE UM PÊNDULO INVERTIDO SUJEITO A OSCILAÇÕES DO PIVÔ

**Palavras-Chave:** PÊNDULO DE KAPITZSA, INTEGRADOR NUMÉRICO, DINAMICA NÃO LINEAR.

**Autores(as):**

**ISABELLE DE ARRUDA CASTILHO, FEM – UNICAMP**

**Prof. Dr. THALES DE FREIXAS PEIXOTO (orientador), FEM - UNICAMP**

---

## 1. INTRODUÇÃO

Estabilidade e equilíbrio são conceitos centrais na engenharia mecânica, desempenhando papéis cruciais na análise e no controle de sistemas físicos. O pêndulo invertido estabilizado é um mecanismo que opera com base na estabilização dinâmica, que avalia como as oscilações se comportam ao longo do tempo e a presença de forças restauradoras que atuam para trazer o sistema de volta ao equilíbrio, conceito introduzido por Stephenson (1908) em seu trabalho “On an Induced Stability” e aplicado no pêndulo invertido estabilizado por Pyotr Kapitza em 1951 no seu artigo, “Dynamic Stability of the Pendulum with Vibrating Suspension Point”. Esse sistema apresenta um comportamento paradoxal, no qual a posição invertida pode ser estabilizada por vibrações verticais de alta frequência aplicadas ao ponto de suspensão.

As bases para compreender esse comportamento foram lançadas por Henri Poincaré, que introduziu os conceitos fundamentais das vibrações e dinâmicas não lineares, além de ter contribuído significativamente para os estudos de estabilidade em sistemas mecânicos (Rao, 2018).

Este estudo analisará o comportamento do pêndulo invertido sob três perspectivas: numérica, analítica e experimental. A validação numérica será realizada por meio de métodos iterativos como Runge-Kutta, simulando a resposta dinâmica para diferentes condições iniciais de frequência e amplitude. A abordagem analítica será conduzida com o uso do método de média, o qual permite uma compreensão mais aprofundada da equação de movimento (Strogatz, 2015).

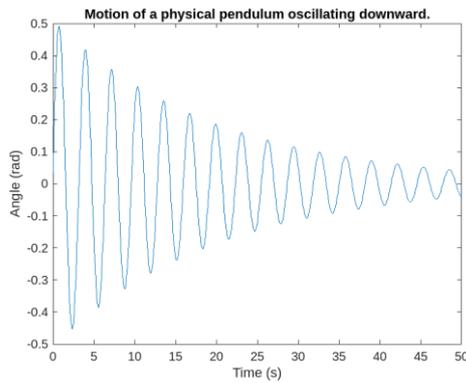
Por fim, a validação experimental será baseada na dissertação de mestrado de Tiago Santos, “O pêndulo de Kapitza: equilibrando o instável” (Santos, 2023), que servirá de referência para o arranjo experimental. Os testes serão conduzidos em laboratório, utilizando um protótipo físico do pêndulo de Kapitza, com o objetivo de verificar as previsões teóricas e complementar o estudo do pêndulo.

## 2. DISCUSSÃO

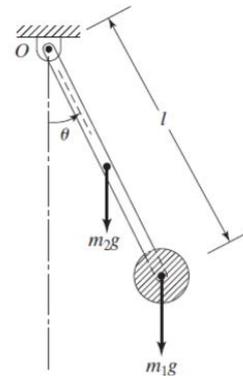
### 2.1 MODELAGEM ANALÍTICA

Uma equação diferencial é uma equação que envolve a taxa de variação da variável dependente em função de outra(s) variável(is) independente(s). Dessa forma, o problema de resolver uma equação diferencial com condições iniciais é conhecido como um problema de valor inicial (PVI). Durante o estudo do pêndulo de Kapitza, serão fornecidas diferentes condições iniciais, como ângulo inicial e frequências de excitação, para analisar condições de estabilidade em diferentes situações.

A análise inicial considerou pêndulos comuns que apresentam comportamento estável e tendem a retornar ao seu estado original, ou seja, posicionados para baixo. A Figura 1 mostra o comportamento do pêndulo físico comum, ilustrado na Figura 2.



**Figura 1:** Representação gráfica do movimento de um pêndulo físico oscilando para baixo, mostrando a variação do ângulo (rad) ao longo do tempo (s).



**Figura 2:** Pêndulo físico

Entretanto, em um sistema invertido apresenta o ponto de equilíbrio é naturalmente instável quando posicionado verticalmente para cima. Nesse estado, a energia potencial gravitacional está em seu máximo, e qualquer pequena perturbação cria uma força que afasta o pêndulo dessa posição. Dessa forma, o sistema não tende, por si só, a retornar à posição de equilíbrio invertida.

Em um pêndulo invertido, os parâmetros que governam o sistema são: massa, amplitude do movimento, comprimento do corpo, momento de inércia, frequência natural, oscilação do pivô e o ângulo com a posição vertical.

Quando esse tipo de pêndulo é estabilizado em sua posição invertida por meio de oscilações de alta frequência no pivô, sua dinâmica pode ser modelada por uma equação de Mathieu que quantifica a intensidade da excitação paramétrica aplicada ao sistema:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\delta + \epsilon \cos(\omega t))x = 0 \quad (1)$$

Considerando o pêndulo como um corpo rígido, ele possui um momento de inércia  $I$  em relação ao ponto de suspensão. A equação exata de movimento específica para o pêndulo de Kapitza, com o ângulo medido a partir da posição invertida no sentido horário, é obtida por meio da dinâmica Lagrangiana, gerando como resultado a seguinte equação:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \left(-4 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} + 4 \frac{ml^2 a}{I l} \cos 2\tau\right) \sin \theta = 0 \quad (2)$$

Linearizando, obtemos uma equação na forma da equação de Mathieu (Eq. 1).

Os termos têm os seguintes significados físicos:

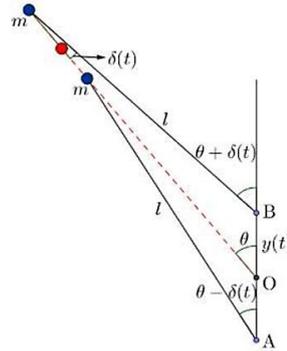
- $\frac{\omega_n^2}{\omega^2}$ : relação entre frequência natural e de excitação;
- $\frac{4ml^2}{I}$ : sensibilidade à excitação externa;
- $\frac{a}{l}$ : intensidade relativa da excitação;
- $\cos(2\tau)$ : função periódica representando a excitação paramétrica.

Ao plotar um gráfico de  $(a/l)$  por  $(\omega_n^2/\omega^2)$ , é possível visualizar as regiões de estabilidade e instabilidade. Esses resultados serão analisados na próxima seção.

Com a equação deduzida, é necessário encontrar as condições que podem estabilizar o sistema na posição invertida. Para isso, utiliza-se o método da média temporal, descrito por Strogatz (2015), que estuda o mecanismo por trás desse comportamento explorando dinâmicas em escalas de tempo diferentes.

O método consiste basicamente em decompor o deslocamento angular em duas partes: um movimento lento  $\theta(t)$ , associado à evolução de longo prazo da orientação do pêndulo, e um componente rápido  $\delta(t)$ , causado pela vibração de alta frequência do pivô:

$$\varphi(t) = \theta(t) + \delta(t) \quad (3)$$



**Figura 3:** Pêndulo realizando uma oscilação completa da posição A para B, simétrica em relação ao ponto O, visto de um referencial inercial. A linha tracejada representa a posição média do pêndulo, formando ângulo  $\theta$  com a vertical e  $\delta$  com a posição real.

Fonte: Adaptado de Santos (2023).

É possível descrever o movimento médio do pêndulo ao decorrer de um longo período, através de cálculos feitos a partir da posição média, ao realizar os cálculos chegamos aos seguintes resultados:

$$\text{Equação de movimento: } \ddot{\theta}' + \left( \frac{(\omega A M d)^2}{2 I p^2} - \frac{g M d}{I p} \right) \theta' = 0 \quad (4)$$

$$\text{Frequência estável: } \omega_{stable} = \sqrt{\left( \frac{(\omega A M d)^2}{2 I p^2} - \frac{g M d}{I p} \right)} \quad (5)$$

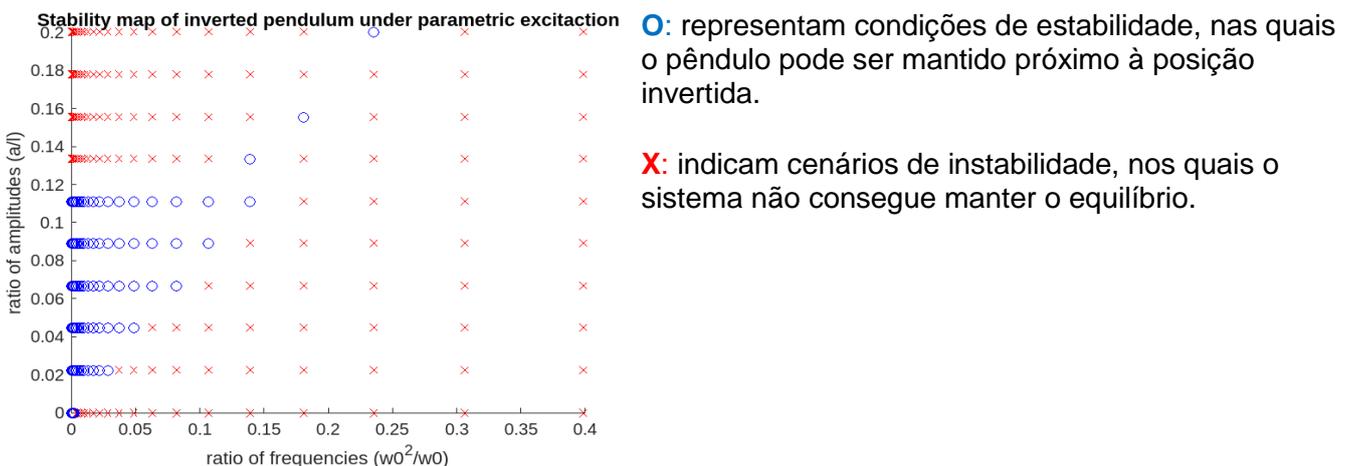
$$\text{Condição de estabilidade: } \omega A > \sqrt{\frac{2 g I p}{M d}} \quad (6)$$

$$\text{Ângulo máximo: } \theta_{max} = \arccos\left(\frac{2 g I p}{\omega^2 A^2 M d}\right) \quad (7)$$

Percebemos que o motivo físico central da estabilidade invertida está na inércia média, que produz um torque restaurador. Se esse torque for suficientemente intenso, ele pode superar o torque gravitacional, impedindo que o pêndulo caia.

## 2.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Para investigar as regiões de estabilidade e as características do movimento do pêndulo de Kapitza, resolvemos numericamente as equações de movimento utilizando o solver ode45 do MATLAB, que implementa um método de Runge-Kutta adaptativo.



**Figura 4:** Mapa de Estabilidade do Pêndulo Invertido sob Excitação Paramétrica

O mapa de estabilidade foi gerado por meio da simulação de uma matriz [10 x 10] de combinações de ângulo inicial e velocidade angular inicial. O gráfico relaciona duas medidas: a razão entre a amplitude do pivô e a distância ao centro de massa ( $A/L$ ), e relaciona a frequência natural com a frequência do pivô ( $\omega_n^2/\omega^2$ ).

O critério de estabilidade adotado exige que, durante toda a simulação, o ângulo ao redor de zero permaneça menor ou igual ao deslocamento angular inicial.

A análise revela que as regiões de estabilidade ocorrem quando baixas amplitudes são combinadas com altas frequências, demonstrando que os resultados estão consistentes com os resultados analíticas, e que a condição de estabilidade é dada por:  $\omega A > \sqrt{\frac{2gl_p}{Md}}$ , essa equação define o limite em que o torque inercial restaurador se torna suficientemente forte para superar o torque gravitacional desestabilizante.

### 3. EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS

O paper “O pêndulo de Kapitza: equilibrando o instável” (Santos, 2023), serviu como base conceitual e técnica tanto para o projeto mecânico quanto para a aplicação educacional.

A construção do aparato experimental envolveu: a impressão 3D da estrutura física utilizando filamento PLA, usinagem de peças em alumínio para maior resistência, projeto do sistema elétrico, programação do microcontrolador (Arduino) em C++, e por fim, a montagem de todos os componentes.

O circuito foi projetado para controlar e monitorar um motor DC utilizando um Arduino UNO. Ele integra componentes-chave, incluindo uma fonte de alimentação de 12V, um MOSFET de canal N, um sensor de corrente, um display LCD 16x2 com interface I2C e uma chave liga/desliga tipo rocker.

Todos os elementos estão conectados através de uma protoboard, facilitando a montagem e os testes.

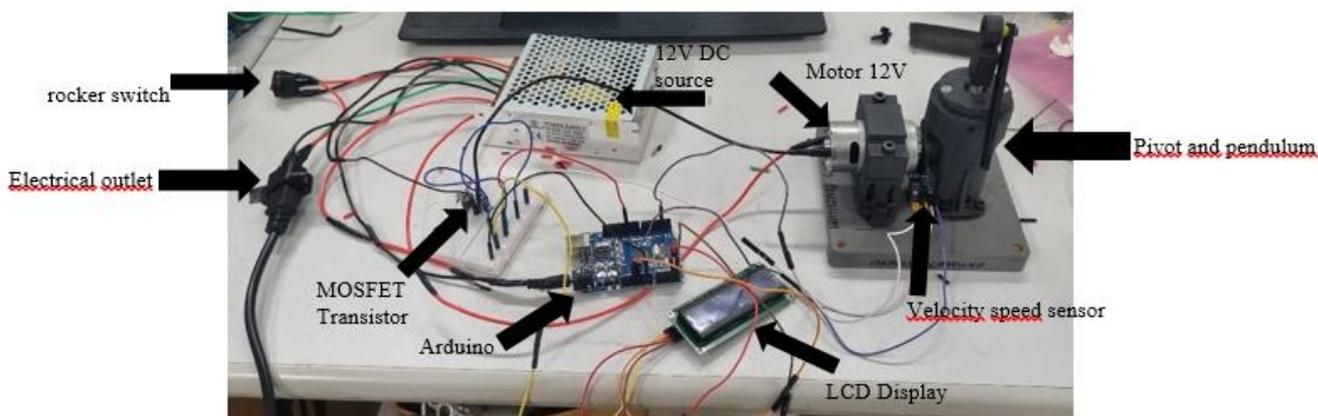


Figura 5: Protótipo completo (mecânico e elétrico)

A alimentação é fornecida por uma fonte regulada de 12V DC, que passa por uma chave rocker, permitindo ao usuário ligar e desligar o sistema com facilidade.

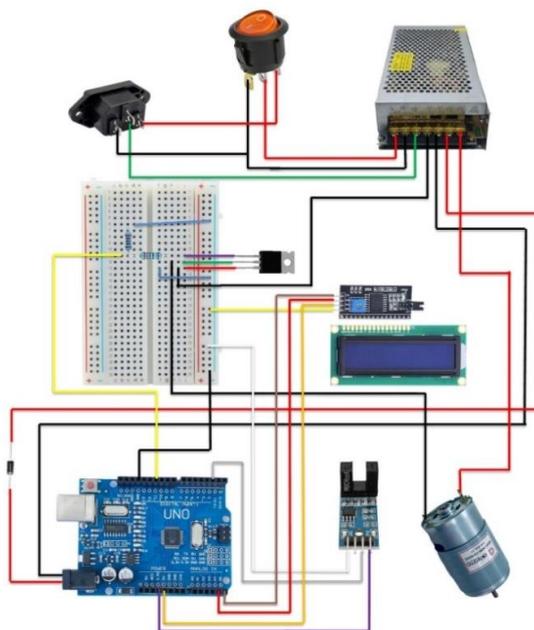
O controle do motor é feito através de um transistor MOSFET de canal N. O source do MOSFET está conectado à alimentação e ao GND do Arduino, o dreno está conectado ao terminal negativo do motor DC. O outro terminal do motor está conectado ao trilho de 12V. O gate do MOSFET é conectado a uma saída digital PWM do Arduino e é utilizado para controlar os pulsos e a frequência enviados ao motor. O transistor é necessário para aumentar a corrente de 40 mA para o valor necessário ao funcionamento do motor.

Um sensor de velocidade de rotação é utilizado para fornecer um feedback sobre a frequência de operação do motor, ajudando a entender qual é a frequência estável específica do sistema.

Um display LCD 16x2 com interface I2C é utilizado para exibir os resultados fornecidos pelo sensor.

Todo o sistema é montado sobre uma protoboard, o que permite prototipagem rápida e modificações simples. O Arduino UNO é alimentado via sua porta USB, que também permite a programação e o monitoramento serial.

Como esperado, os resultados foram semelhantes à teoria apresentada neste trabalho. Quando a frequência é baixa, o estado de equilíbrio é voltado para baixo. Quando o motor opera em altas frequências, o pêndulo permanece estável na posição invertida, confirmando o comportamento previsto pelo modelo de Kapitza.



**Figura 6:** Diagrama elétrico real de todo o circuito.

A transição do comportamento instável para estável ocorreu experimentalmente na faixa de frequência entre 60 Hz e 65 Hz, o que é consistente com a frequência crítica calculada analiticamente:

$$\omega_{stable} = \sqrt{\left(\frac{(\omega AMd)^2}{2I_p^2} - \frac{gMd}{I_p}\right)} = 63.5Hz$$

Além disso, pequenos desvios da posição vertical em altas frequências foram naturalmente corrigidos pela dinâmica do sistema, indicando a presença de um “potencial efetivo restaurador” descrito na teoria.

Os resultados confirmam que o protótipo físico se comporta de acordo com o modelo médio de Kapitza, validando tanto as simulações numéricas quanto as previsões analíticas apresentadas anteriormente neste trabalho.

## 4. CONCLUSÃO

O estudo confirmou que oscilações verticais de alta frequência são capazes de estabilizar um pêndulo invertido. A coerência entre modelo analítico, simulações numéricas e resultados experimentais reforça a validade do modelo de Kapitza. O sistema se mostra promissor como ferramenta didática para exploração de dinâmica não linear e estabilidade em sistemas físicos.

O pêndulo de Kapitza, embora aparentemente simples, encapsula princípios físicos profundos com aplicações que transcendem a engenharia mecânica, alcançando áreas como robótica, teoria de controle, ressonância paramétrica e até mecânica quântica.

## 5. BIBLIOGRAFIA

- SANTOS, Tiago Paulino dos. *O pêndulo de Kapitza: equilibrando o instável*. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.
- LUCHESE, Thiago de Cacio. **O pêndulo invertido sob diferentes perspectivas**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 40, n. 4, e4304, 2018.
- Stephenson, “**On an induced stability**,” *Phil. Mag.* (1908), 15, pp. 233 – 236; “On a new type of dynamical stability”, *Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc.* (1908), 52, pp. 1 – 10.
- STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- RAO, Singiresu S. **Mechanical Vibrations**. 6th ed. Adapted edition. Harlow: Pearson Education Limited, 2018.
- TAYLOR, John R. **Classical mechanics**. Sausalito: University Science Books, 2005.
- GAPONOV-GREKHOV, A. V.; RABINOVICH, M. I.; ENGELBRECHT, J. (Eds.). **Nonlinear waves: dynamics and evolution**. Translated from the Russian. Berlin: Springer-Verlag, 1989. (Research Reports in Physics).