Estudo sobre o Comportamento Dinâmico e Técnicas de Controle em Pêndulos Invertidos

Autores:
Samuel Salim Galvão [FEM - Unicamp]
Prof. Dr. Diogo Stuani Alves (Supervisor) [FEM - Unicamp]

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos como o pêndulo invertido clássico e o Pêndulo de Furuta é essencial para a compreensão e a aplicação de técnicas de controle à engenharia e robótica. Os sistemas anteriormente mencionados, conhecidos por sua instabilidade inerente, são ideais para a validação de métodos de controle avançados. Entre as abordagens se encontram os métodos PID (Proporcional, Integral e Derivativo) e H∞, analisados a partir de um modelo bem estruturado.

O estudo destes sistemas pode ser de grande valia para pesquisas acadêmicas, robótica, automação industrial e até mesmo exploração aeroespacial, devido à sua proximidade à dinâmica do lançamento de um foguete. O projeto de controladores eficientes para sistemas influencia diretamente o desenvolvimento de tecnologias seguras e inovadoras. De máquinas autônomas a sistemas biomecânicos, o controle preciso e a robustez são capacidades críticas que convertem conhecimento técnico em soluções práticas para problemas reais.

O pêndulo invertido clássico consiste em um pêndulo acoplado a um carro que corre sobre um trilho linear. O Pêndulo de Furuta é uma versão modificada deste sistema, apresentado em 1992 por Katsuhisa Furuta, onde a oscilação do pêndulo é controlada pela rotação de uma coluna vertical.

Pêndulo invertido clássico

Pêndulo de Furuta

Metodologia

A análise destes sistemas dinâmicos se inicia pela modelagem das equações de movimento através da abordagem Lagrangeana. Este método permite a utilização das energias potenciais e cinéticas para descrever a dinâmica de um sistema mecânico. A partir das equações diferenciais ordinárias, é realizada uma linearização para simplificar a análise e possibilitar a aplicação de métodos de controle linear. Assim, o sistema pode ser representado por um modelo controlável que ainda contém suas principais propriedades dinâmicas. Abaixo, é possível observar a aplicação desta abordagem ao Pêndulo de Furuta:
Sendo:

K_T: $energia\ cinética\ total\ do\ sistema$

U_T: $energia\ potencial\ total\ do\ sistema$

m: $massa\ de\ um\ componente\ do\ sistema$

l: $comprimento\ de\ um\ componente\ do\ sistema$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}: $momento\ de\ inérica\ de\ um\ componente\ com\ respeito\ a\ um\ eixo$

θ: $posição\ angular\ da\ coluna\ vertical\ do\ sistema$

ϕ: $posição\ angular\ da\ haste\ do\ pêndulo\ do\ sistema$

B_1, B_2: $coeficientes\ de\ atrito\ em\ ambos\ os\ graus\ de\ liberdade$

M: $momento\ aplicado$ à $coluna\ do\ sistema$

Tem-se:

$$K_T = \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\left(I_{zz_c} + I_{zz_b} + \frac{m_b l_b^2}{4} + m_p l_b^2 + I_{zz_p} cos^2\phi + \left(I_{xx_p} + \frac{m_p l_p^2}{4}\right) sin^2\phi\right) + \dot{\phi}^2\left(\frac{m_p l_p^2}{4} + I_{yy_p}\right) - \dot{\phi}\dot{\theta} m_p l_b l_p cos\phi\right]$$

$$U_T = g\left[l_c\left(\frac{m_c}{2} + m_b + m_p\right) + \frac{m_p l_p cos\phi}{2}\right]$$

O Lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = K - U$$

$$L = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\left[I_{zz_c} + I_{zz_b} + I_{zz_p} cos^2\phi + m_p l_b^2 + \frac{m_b l_b^2}{4} + \left(I_{xx_p} + \frac{m_p l_p^2}{4}\right) sin^2\phi\right] + \frac{\dot{\phi}^2}{2}\left[I_{yy_p} + \frac{m_p l_p^2}{4}\right] - \frac{\dot{\theta}\dot{\phi} m_p l_b l_p cos\phi}{2} - g l_c\left(\frac{m_c}{2} + m_b + m_p\right) - \frac{g m_p l\ cos\phi}{2}$$

Utilizando algumas substituições e aplicando a equação de Lagrange em ambos os graus de liberdade do sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = M - B_1\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = - B_2\dot{\phi}$$

obtém-se as seguintes equações de movimento:

$$\ddot{\theta} = \frac{\alpha_4\left[M - B_1\dot{\theta} - \alpha_5\dot{\phi}^2 sin\phi - 2(\alpha_3 - \alpha_2)\dot{\theta}\dot{\phi} sin\phi cos\phi\right] + \alpha_5\left[\alpha_7 sin\phi cos\phi + \dot{\theta}^2 cos^2\phi sin\phi(\alpha_3 - \alpha_2) - B_2\dot{\phi} cos\phi\right]}{\delta\alpha_4 - \alpha_5^2 cos^2\phi}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\alpha_5\left[M cos\phi - B_1\dot{\theta}cos\phi + \alpha_5\dot{\phi}^2 sin\phi cos\phi - 2\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\dot{\theta}\dot{\phi}cos^2\phi sin\phi\right] + \delta\left[\dot{\theta}^2 cos\phi sin\phi\left(\alpha_3-\alpha_2\right) - B_2\dot{\phi} + \alpha_7 sin\phi\right]}{\delta\alpha_4 - \alpha_5^2 cos^2\phi}$$

Aplicando a linearização para pequenas oscilações em torno de $\phi = 0$ (posição vertical para cima, equilíbrio instável):

$$\ddot{\theta} = \frac{\alpha_4 M - \alpha_4 B_1\dot{\theta} - \alpha_5 B_2\dot{\phi} + \alpha_5\alpha_7\phi}{\alpha_4\left(\alpha_1+\alpha_2\right) - \alpha_5^2}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\alpha_5 M - \alpha_5 B_1\dot{\theta} - \left(\alpha_1+\alpha_2\right)B_2\dot{\phi} + \alpha_7\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\phi}{\alpha_4\left(\alpha_1+\alpha_2\right) - \alpha_5^2}$$

As substituições utilizadas nesta modelagem são:

$$\alpha_1 = I_{zz_c} + I_{zz_b} + m_p l_b^2 + \frac{m_b l_b^2}{4}$$

$$\alpha_2 = I_{zz_p}$$

$$\alpha_3 = I_{xx_p} + \frac{m_p l_p^2}{4}$$

$$\alpha_4 = I_{yy_p} + \frac{m_p l_p^2}{4}$$

$$\alpha_5 = \frac{m_p l_b l_p}{2}$$

$$\alpha_6 = g l_c\left(\frac{m_c}{2} + m_b + m_p\right)$$

$$\alpha_7 = \frac{g m_p l_p}{2}$$

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 cos^2\phi + \alpha_3 sin^2\phi$$

O controle PID se baseia no ajuste da entrada do sistema através da manipulação dos dados obtidos a partir da saída. Assim, derivando, integrando e multiplicando o erro (diferença entre saída e objetivo/setpoint), para determinar o valor da entrada necessário. Suas principais características são os ajustes contínuos feitos à entrada e a simplicidade de sua aplicação, tornando-o altamente confiável e extensivamente utilizado para propósitos industriais e acadêmicos. Definindo o setpoint como:

$$r(t) = \left[\theta_r(t) \quad \phi_r(t)\right]^T = [0 \quad 0]^T$$

O erro do sistema será:

$$e(t) = [-\ \theta(t) \quad -\ \phi(t)]^T$$

Experimentalmente, os valores dos ganhos proporcional, integrativo e derivativo obtidos que garantiram a melhor resposta foram:

$$K_P = [-\ 10 \quad 150],\ K_I = [-\ 3 \quad 75],\ K_D = [-\ 10 \quad 25]$$

Dessa forma, a entrada do sistema, ou seja, o momento aplicado à coluna, será dado por:

$$M(s) = K_P e(s) + \frac{1}{s} K_I e(s) + sK_D e(s), \text{ no domínio da frequência.}$$

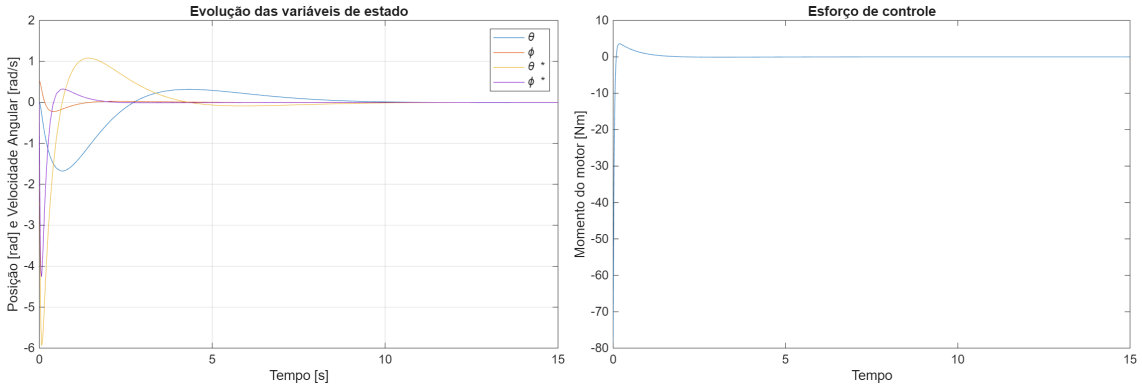
Por outro lado, o controle H∞ busca garantir o desempenho ideal do sistema, mesmo sob a influência de perturbações externas, utilizando o conceito da norma H∞ para minimizar os efeitos de perturbações de altos níveis de energia. Sua abordagem é baseada no modelo matemático do sistema e seus princípios o tornam robusto e preciso.

Os objetivos deste projeto são obter um nível profundo de compreensão da dinâmica de ambos os sistemas através da análise numérica, aplicar ambos os métodos de controle mencionados acima e avaliar seu desempenho.

Resultados e discussão

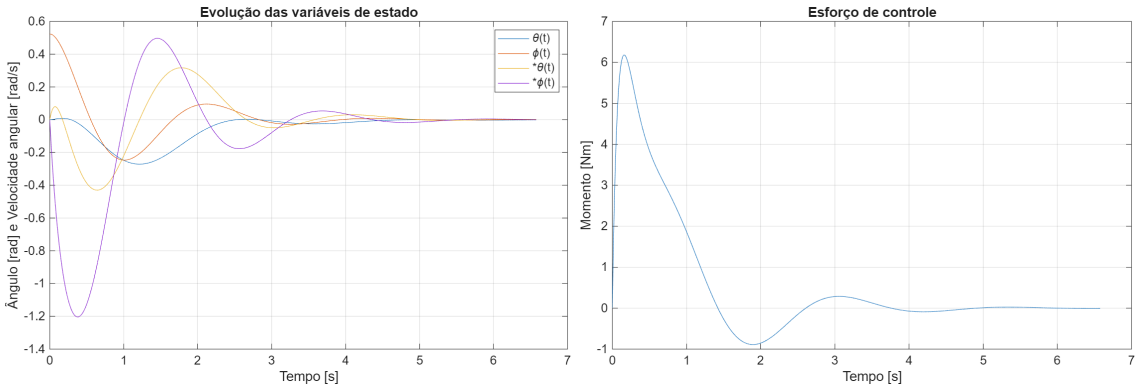
Para a discussão dos resultados, deve-se considerar que todas as curvas foram obtidas por cálculo numérico computacional, através do software MATLAB. Assim, os todos os resultados aqui apresentados são teóricos.

O controle PID apresentou resultados satisfatórios, e foi capaz de estabilizar o sistema, mesmo sob a influência de perturbações externas. Porém, os esforços de controle aplicados aos sistemas alcançaram valores demasiadamente altos, o que, em uma aplicação real, impossibilitaria a utilização de atuadores factíveis para as dimensões do mecanismo, além de haver a possibilidade de quebra dos componentes devido às altas tensões impostas.



Gráficos referentes ao controle do Pêndulo de Furuta através da técnica PID

O controlador H∞, por outro lado, viabiliza a aplicação de um esforço de controle mais suave, devido a seu princípio de minimização de ganho do sistema e modulação por pesos de desempenho das variáveis de saída.



Gráficos referentes ao controle do Pêndulo de Furuta através da técnica H∞

O controle PID, por sua simplicidade, pode ser aplicado a uma ampla gama de sistemas e soluções de controle, mas é limitado a um funcionamento análogo à tentativa e erro, enquanto o controle H∞, apesar de complexo, é fundamentado nas funções de transferência do sistema e garante a possibilidade de uma resposta otimizada, minimizado a resposta no “pior caso”.

Referências

[1] Meriam, J.L., Kraige, L.G., Bolton, J.N., Engineering mechanics: Dynamics, 9th Ed., Jhon Willey & Sons, 2018.

[2] Furuta, K., Yamakita, M., Kobayashi, S., Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, v. 206(4), p. 263-269, 1992.

[3] Boubaker, O., The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: A survey, International Journal of Advanced Robotic Systems, v. 10(5), 2013, doi:10.5772/55058.

[4] Lindfield, G., Penny, J., Numerical methods using Matlab, 4th Ed., Academic Press, London, 2019.

[9] Miková, L., Gmiterko, A., Hroncová, D., State space representation of dynamical systems, American Journal of Mechanical Engineering. V. 4(7), p. 385-389, 2016.

[10] Franklin, G.F., Powell, J.D., Emani-Naeini, A., Feedback control of dynamic systems, 8th Ed., Pearson, New York, 2020.