UMA INTRODUÇÃO À ANÁLISE GLOBAL

Palavras-Chave: formas diferenciais, variedades diferenciáveis, operadores diferenciais

Autores:

Mauro de Andrade Pinto, IMECC - UNICAMP

Prof. Dr. Diego Sebastián Ledesma, IMECC - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

A análise global ocupa um papel central na matemática por tratar, de forma ampla e unificada, temas que envolvem áreas como geometria diferencial, topologia e teoria das equações diferenciais. Diferentemente da abordagem local — que se limita ao estudo de propriedades em torno de pontos específicos — a análise global busca compreender o comportamento de funções, estruturas e espaços como um todo, levando em conta as interações e relações entre suas diferentes partes. Essa perspectiva mais abrangente permite a formulação de teoremas e conceitos que vão além do contexto local, oferecendo uma visão mais profunda e completa dos objetos matemáticos. Além disso, é uma ferramenta essencial para investigar propriedades de caráter global, como a existência de soluções de equações diferenciais em todo um domínio ou a descrição de espaços com curvatura constante na geometria diferencial.

O projeto de iniciação científica em questão, que foi apoiado por bolsa FAPESP por meio do processo nº 2024/07965-6 entre setembro de 2024 e agosto de 2025, procurou explorar essa área da matemática por meio de estudos dirigidos e teve os seguintes objetivos:

- Revisar conceitos de álgebra multilinear e de cálculo diferencial necessários para a definição de formas multilineares e diferenciais;
- Desenvolver a teoria do cálculo diferencial e integral para formas diferenciais definidas em subconjuntos abertos do espaço euclidiano;
- Definir e explorar variedades diferenciáveis e integração em variedades;
- Estudar variedades Riemannianas e os operadores diferenciais clássicos definidos nesses domínios, assim como explorar a decomposição de Hodge para formas diferenciais nessas variedades;
- Abordar o Teorema de Frobenius e suas aplicações.

No pôster para o XXXIII Congresso de Iniciação Científica da UNICAMP em 2025, pretende-se abordar uma parte importante e interessante desse estudo. Mais especificamente, o pôster tratará das variedades Riemannianas, definindo os principais operadores diferenciais nesses domínios e estudando os teoremas necessários para explorar uma aplicação na física. Essa temática resume bem a proposta do projeto de iniciação científica e dá conta de explorar os principais conceitos.

METODOLOGIA:

A metodologia do projeto se deu a partir do estudo individual dos tópicos a partir da bibliografia que consta no fim desse resumo. Em complemento a isso, reuniões semanais foram realizadas junto ao orientador em horários pré-estabelecidos. Em tais reuniões, os tópicos abordados na semana eram discutidos e as eventuais dúvidas eram retiradas, o que proporcionou um entendimento mais efetivo e produtivo do estudo feito.

Ademais, durante todo o processo, foi incentivado pelo professor orientador e devidamente explorado pelo aluno a resolução de exercícios relacionados, e que constam na primeira referência bibliográfica desse documento. Por fim, o registro por meio de anotações por parte do aluno também foi peça chave na metodologia da iniciação científica, ajudando na fixação dos conteúdos.

ATIVIDADES DESENVOLVIDAS:

A primeira etapa do projeto consistiu no estudo da base de álgebra multilinear necessária para os conceitos posteriores. Nesse sentido, foram definidos os conceitos de formas multilineares, produto exterior de formas, álgebra de Grassmann e suas bases. Também nessa linha, algumas outras operações de formas multilineares foram exploradas, como a *pullback*, o produto interior e o produto escalar dessas formas. Para finalizar essa fase, conceitos como a orientação de um espaço vetorial, a forma volume e o operador de Hodge também foram estudados. Todo esse conteúdo compõe uma base sólida e suficiente para os próximos passos do projeto.

Como estrela principal da iniciação científica, as formas diferenciais foram devidamente definidas e exploradas, nesse momento, enquanto definidas em subconjuntos abertos do espaço euclidiano. Para isso, foi necessário definir conceitos como o espaço tangente e expandir as operações previamente definidas para formas multilineares arbitrárias. Aqui, um novo operador, de extrema importância, é introduzido: a derivada exterior, que nos permite classificar as formas diferenciais em exatas e fechadas e explorar o famoso Lema de Poincaré e as cohomologias de de Rham. Tendo devidamente estudado o espaço vetorial das formas diferenciais, somos capazes de muní-lo com os operadores diferenciais clássicos: o gradiente, o divergente, o laplaciano e, no caso do espaço euclidiano tridimensional, também o rotacional. Com isso, foi possível partir para um elemento importante da análise do cálculo multidimensional, que é a integração dessas formas diferenciais (no momento, sobre domínios no espaço euclidiano), além de enunciar e explorar a demonstração do Teorema de Stokes, em sua versão de formas diferenciais. A fim de aplicar toda essa teoria, foi explorado pelo aluno o famoso Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, cuja demonstração foi amplamente estudada, sendo também objeto principal de um seminário apresentado pelo aluno no IMECC durante o primeiro semestre de 2025.

Avançando no projeto, o próximo passo foi expandir toda essa teoria para o contexto de novos objetos matemáticos: as variedades diferenciáveis, que foram devidamente definidas a partir de cartas do espaço euclidiano. A fim de construir o cálculo diferencial nessas variedades, foi necessário expandir conceitos como o espaço tangente (definindo também o fibrado tangente), o diferencial de uma função, campos vetoriais e derivadas direcionais. Munindo tais objetos com um produto interno que varia suavemente no fibrado tangente – a chamada métrica Riemanniana – denominamos agora tais variedades como Riemannianas. Em uma variedade desse tipo, é possível expandir os operadores diferenciais tradicionais: o gradiente, o divergente e o laplaciano. Com o auxílio de cartas, o aluno foi capaz também de estudar a expansão da definição de formas diferenciais para variedades diferenciáveis, assim como classificá-las em orientáveis e não orientáveis. Tratando de variedades orientáveis, é possível definir uma forma volume e também integrar formas diferenciais nesses domínios. Para tanto, foi necessário explorar uma ferramenta importante: a partição da unidade, que permite a integração sobre variedades que não são cobertas por uma única carta.

Tendo definido a integração de formas diferenciais em variedades, o projeto seguiu para explorar conceitos e teoremas mais avançadas, a começar pelo Teorema de Stokes em sua versão mais generalizada. Outros resultados estudados foram o famoso Teorema da Esfera Cabeluda, as Fórmulas de Green, o Teorema de Hopf, a Fórmula de Ostrogradski e o Teorema de Gauss. Avançando mais um pouco, o aluno partiu para o estudo de novos conceitos nesse mesmo contexto de variedades diferenciáveis. A começar pela derivada de Lie, que permite uma interessante interpretação geométrica da divergência de um campo vetorial, o aluno passou pelo estudo de comutadores de campos vetoriais, funções harmônicas em variedades e tratou também do operador de Hodge-Laplace de formas diferenciais, que abre as portas para o belíssimo Teorema da Decomposição de Hodge.

Finalizando o projeto, o último tema abordado foi o Teorema de Frobenius, que aborda as condições necessárias e suficientes de integrabilidade de uma dada distribuição geométrica, também conhecida como sistema Pfaffiano. Tal teorema, que possui uma demonstração muito rica, e seus conceitos relacionados foram devidamente explorados pelo bolsista, assim como algumas de suas aplicações na teoria de equações diferenciais e também na teoria de superfícies.

PROPOSTA DO PÔSTER:

A fim de ilustrar da melhor maneira possível a proposta do projeto e os resultados estudados pelo aluno durante o projeto, pretende-se apresentar no pôster as principais definições, resultados e aplicações da teoria de operadores diferenciais em variedades Riemannianas.

Mais especificamente, a apresentação vai se iniciar com a definição dos conceitos de métrica e variedade Riemanniana e os operadores gradiente, divergente e laplaciano nesses domínios. Com isso, vamos enunciar a Fórmula de Ostrogradski e demonstrar de forma bem concisa o Teorema de Gauss e a Primeira Fórmula de Green. Para finalizar, o pôster trabalhará a resolução da equação do calor em uma variedade Riemanniana de dimensão arbitrária e sob condições de contorno específicas, a fim de exemplificar uma aplicação física de toda essa teoria.

CONCLUSÕES:

O projeto de iniciação científica em questão pretendeu explorar alguns importantes conceitos da análise geométrica sob o ponto de vista global, tendo como elementos principais as formas diferenciais e as variedades Riemannianas. Tais elementos, sendo acompanhados de seus conceitos e teoremas relacionados, constituem uma teoria matemática rica em aplicações em diversas outras áreas.

A fim de solidificar e compartilhar os conteúdos estudados pelo bolsista, pretende-se apresentar no XXXIII Congresso de Iniciação Científica da UNICAMP um pôster que traz uma parte da teoria explorada que representa bem a proposta do projeto, permeando definições, resultados e aplicações.

A participação nesse congresso já fazia parte do planejamento e cronograma inicial do projeto de iniciação científica e representará uma experiência muito rica para o estudante, que terá a oportunidade de dividir com a comunidade acadêmica o conhecimento construído durante todo esse processo.

BIBLIOGRAFIA

AGRICOLA, I.; FRIEDRICH, T. **Global Analysis: Differential Forms in Analysis, Geometry and Physics.** AMS Graduate Studies in Mathematics, Volume 52;

MADSEN, I.; TORNEHAVE, J. **From calculus to de Rham cohomology and characteristic classes.** Cambridge University Press, Cambridge, 1997;

O'NEILL, B. **Elementary Differential Geometry.** Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006.