

# Explorando leis de controle não lineares para controle de vibração em máquinas sujeitas a desbalanceamento rotativo

Palavras Chave: Máquinas Rotativas; Controle; Sistemas não-lineares

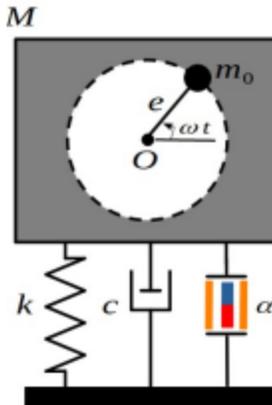
**Autores:**

**Autor:** Gabriela Gomes Marsaioli, FEM, UNICAMP  
**Orientador:** Josué Labaki Silva, FEM, UNICAMP  
**Co-Orientador:** José Augusto Ignácio da Silva, POLI, USP

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas mecânicos estão sujeitos a vibrações que, em muitas aplicações, podem causar falhas por fadiga devido a oscilações e carregamentos cíclicos. Este projeto tem como objetivo propor um modelo dinâmico e o desenvolvimento de absorvedores de vibração não lineares, visando estudar o comportamento do sistema sem e com controle.

## 2. MODELO MATEMÁTICO



Dado o sistema massa-mola amortecido, com um único grau de liberdade sem a suspensão eletromagnética (ação de controle), utiliza-se a segunda lei de Newton eq(1) para construir a equação característica do sistema.

$$\sum F = Mx'' \quad (1)$$

Adotado o referencial, substitui-se o somatório de forças pelos termos  $-cx'$  e  $-kx$  referentes ao amortecimento

viscoso e a mola, resultando na equação diferencial que caracteriza o movimento vertical do sistema.

$$Mx'' + cx' + kx = mew^2 \sin(\omega t) \quad (2)$$

Para resolver a equação (2), admite-se uma solução da equação homogênea da forma

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (3)$$

onde  $C_1, C_2$  são constantes arbitrárias do sistema definidas pelas condições iniciais  $x_0$  e  $\dot{x}_0$ .

Já para a parte particular, uma força  $F(t)$ , gerada por uma massa  $m$  desbalanceada de ecentricidade  $e$  e ângulo  $\omega t$  também espera uma solução harmônica. Assim, admite-se que esta esteja na forma

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \Phi) \quad (4)$$

onde  $X$  e  $\Phi$  são constantes a determinar.  $X$  e  $\Phi$  representam a amplitude e o ângulo de fase da resposta, respectivamente. Agora, substituindo a equação (4) na equação (3) obtém-se

$$\begin{aligned} X[(M\omega^2 - k)\sin(\omega t - \Phi) + c\omega \cos(\omega t - \Phi)] \\ = mew^2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (5)$$

e, usando as relações trigonométricas para a subtração de arcos e manipulação algébrica da expressão, a solução da equação (5) é

$$X = \frac{mew^2}{[(k - M\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

e

$$\Phi = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{k - M\omega^2} \right) \quad (7)$$

Dividindo o numerador e o denominador da equação (17) por  $k$  e fazendo as seguintes substituições

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2Mw_n} = \frac{c}{\sqrt{Mk}}$$

$$\frac{c}{M} = 2\zeta w_n$$

$$\delta_{st} = \frac{mew^2}{k} \quad (\text{deflexão sob a força estática } F_0 = mew^2)$$

obtém-se

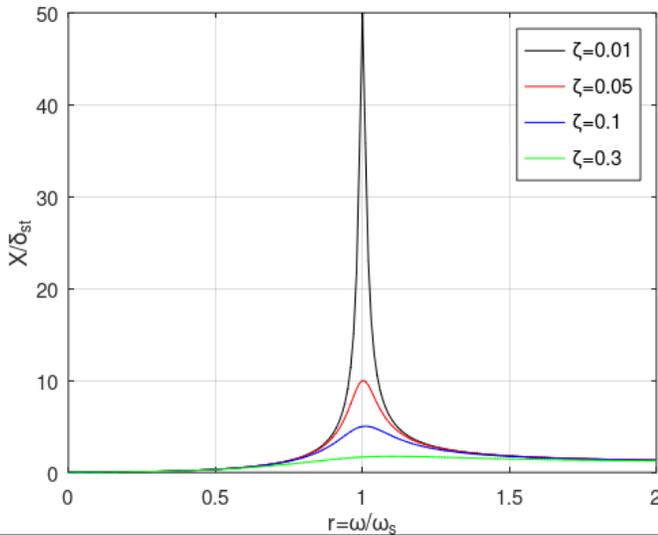
$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left\{ \left[ 1 - \left( \frac{w}{w_n} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2\zeta \frac{w}{w_n} \right]^2 \right\}^2} \quad (8)$$

ou

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (9)$$

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com a dedução e análise da solução da equação diferencial que descreve o movimento do sistema, é possível observar que, conforme o tempo tende ao infinito, a solução do problema caminha somente a solução da parte particular do modelo. Assim, é possível construir gráficos que demonstram o comportamento do sistema conforme a oscilação de diferentes variáveis do problema.



Observa-se que, à medida que a razão de amortecimento de um sistema aumenta, a amplitude máxima de oscilação tende a diminuir. Esse comportamento evidencia o papel do amortecimento na dissipação de energia vibratória e no controle das amplitudes de resposta. Além disso, para

um mesmo valor de razão de amortecimento, verifica-se que a amplitude da resposta do sistema cresce à medida que a razão entre as frequências se aproxima de 1. Isso ocorre porque essa condição representa a proximidade com a ressonância, situação na qual o sistema apresenta maior sensibilidade às excitações externas.

### 4. AÇÃO DE CONTROLE

Nesta etapa da pesquisa, serão aplicadas duas leis de controle com o objetivo de estudar a resposta do sistema através método do balanço harmônico e do integrador numérico ode45 do MATLAB (método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo adaptativo).

#### 4.1. Lei de controle I

A equação de movimento com a ação de controle para o problema em estudo é dada por:

$$M\ddot{u} + c\dot{u} + ku = m_0ew^2 \sin(\omega t) + F_c(t) \quad (10)$$

Primeira Lei de Controle a ser analisada:

$$F_c(t) = -G_c\dot{u}^3 \quad (11)$$

Substituindo na Eq. (1), temos:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = \left(\frac{m_0}{M}\right)ew^2 \sin(\omega t) - \left(\frac{G_c}{M}\right)\dot{u}^3 \quad (12)$$

**Solução via método do balanço harmônico:**

$$u(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (13)$$

Substituindo (4) em (3), obtemos:

$$-\omega^2X \sin(\omega t - \phi) + 2\zeta\omega_n\omega X \cos(\omega t - \phi) + \omega_n^2X \sin(\omega t - \phi) = \left(\frac{m_0}{M}\right)ew^2 \sin(\omega t) - \left(\frac{G_c}{M}\right)(\omega X \cos(\omega t - \phi))^3 \quad (14)$$

O termo não linear:

$$\left(\frac{G_c}{M}\right)(\omega X \cos(\omega t - \phi))^3 \approx \frac{3G_c\omega^3X^3}{4M} \cos(\omega t - \phi) \quad (15)$$

Substituindo:

$$(\omega_n^2 - \omega^2)X \cos \phi + \left(2\zeta\omega_n\omega X + \frac{3G_c\omega^3X^3}{4M}\right) \sin \phi = \left(\frac{m_0}{M}\right)ew^2 \quad (16)$$

$$-(\omega_n^2 - \omega^2)X \sin \phi + \left(2\zeta\omega_n\omega X + \frac{3G_c\omega^3X^3}{4M}\right) \cos \phi = 0 \quad (17)$$

Eliminando  $\phi$ :

$$(\omega_n^2 - \omega^2)^2 X^2 + \left(2\zeta\omega_n\omega X + \frac{3G_c\omega^3 X^3}{4M}\right)^2 = \left(\frac{m_0}{M}\right)^2 e^2 \omega^4 \quad (18)$$

Com isso, obtemos a equação polinomial:

$$\alpha_3 Z^3 + \alpha_2 Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_0 = 0, \quad \text{com } Z = X^2 \quad (19)$$

$$\alpha_3 = \frac{9G_c^2\omega^6}{16M^2}, \quad \alpha_2 = \frac{3\zeta G_c\omega_n\omega^4}{M},$$

$$\alpha_1 = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2, \quad \alpha_0 = -\left(\frac{m_0}{M}\right)^2 e^2 \omega^4$$

## 4.2. Lei de Controle II

A segunda lei de controle a ser estudada neste trabalho é dada por:

$$F_c(t) = -G_c u^3 \quad (20)$$

Substituindo a força de controle na equação de movimento:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{m_0}{M}\right) e\omega^2 \sin(\omega t) - \left(\frac{G_c}{M}\right) u^3 \quad (21)$$

Assumindo a resposta harmônica:

$$u(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (22)$$

Substituindo (14) em (13):

$$-\omega^2 X \sin(\omega t - \phi) + 2\zeta\omega_n\omega X \cos(\omega t - \phi) + \omega_n^2 X \sin(\omega t - \phi) = \left(\frac{m_0}{M}\right) e\omega^2 \sin(\omega t) - \left(\frac{G_c}{M}\right) (X \sin(\omega t - \phi))^3 \quad (23)$$

O termo cúbico:

$$\left(\frac{G_c}{M}\right) (X \sin(\omega t - \phi))^3 \approx \frac{3G_c X^3}{4M} \sin(\omega t - \phi) \quad (24)$$

Substituindo:

$$(\omega_n^2 - \omega^2) X \cos \phi + 2\zeta\omega_n\omega X \sin \phi = \left(\frac{m_0}{M}\right) e\omega^2 - \frac{3G_c X^3}{4M} \cos \phi \quad (25)$$

$$-(\omega_n^2 - \omega^2) X \sin \phi + 2\zeta\omega_n\omega X \cos \phi = \frac{3G_c X^3}{4M} \sin \phi \quad (26)$$

Eliminando  $\phi$ , obtemos a equação algébrica:

$$(\omega_n^2 - \omega^2)^2 X^2 + (2\zeta\omega_n\omega X)^2 = \left(\left(\frac{m_0}{M}\right) e\omega^2 - \frac{3G_c X^3}{4M}\right)^2 \quad (27)$$

Colocando  $Z = X^2$ , chega-se a um polinômio:

$$\beta_3 Z^3 + \beta_2 Z^2 + \beta_1 Z + \beta_0 = 0 \quad (28)$$

Com coeficientes:

$$\beta_3 = \left(\frac{9G_c^2}{16M^2}\right), \quad \beta_2 = -\left(\frac{3G_c e\omega^2 m_0}{M^2}\right),$$

$$\beta_1 = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2 + \left(\frac{e^2\omega^4 m_0^2}{M^2}\right), \quad \beta_0 = 0$$

O diagrama da amplitude em função da frequência pode ser obtido pela solução da Eq. (27), para cada frequência de excitação considerada. Importante observar que, após resolver a Eq. (27), é necessário fazer  $X = \sqrt{Z}$  para obter a amplitude de oscilação da estrutura.

## 4.3. Resultados da Ação de Controle

Obtidas as soluções analíticas aproximadas do modelo matemático utilizando o HBM, utilizou-se o MATLAB para produzir as curvas de resposta em frequência para cada uma das leis de controle variando o parâmetro do ganho de controle  $G_c$  e o amortecimento  $\zeta$  do sistema primário.

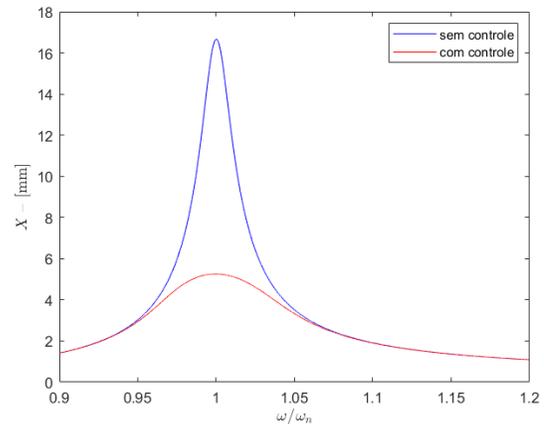
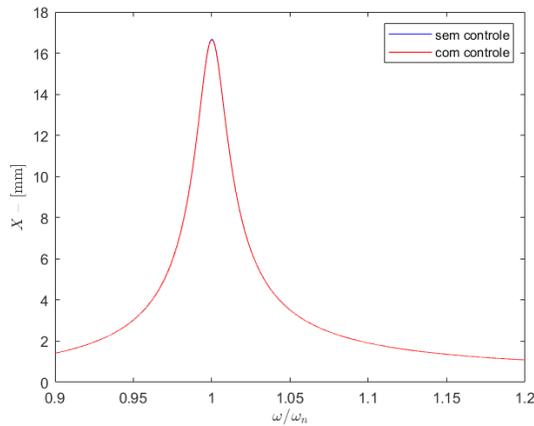
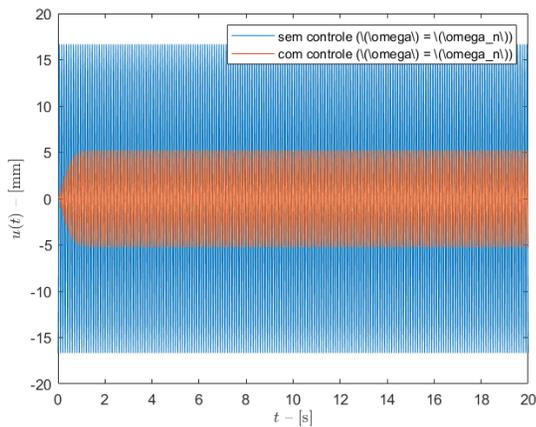


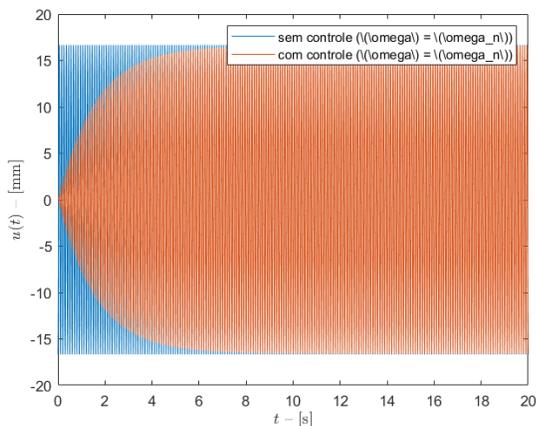
Figura 1: Método do HBM para a Lei de controle I com  $G_c = 100$  e  $\zeta = 0,01$



**Figura 2:** Método do HBM para a Lei de controle II com  $G_c = 100$  e  $\zeta = 0,01$



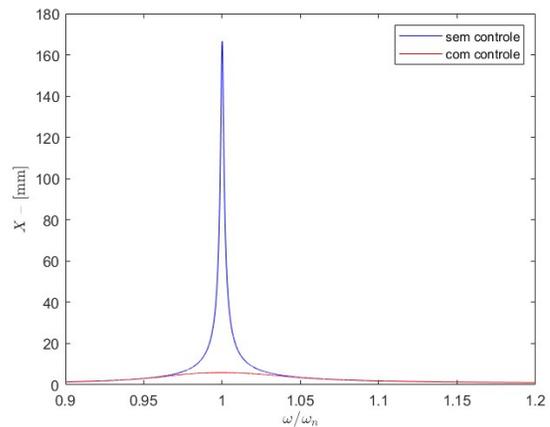
**Figura 3:** Simulação ode45 para a Lei de controle I com  $G_c = 100$  e  $\zeta = 0,01$



**Figura 4:** Simulação ode45 para a Lei de controle II com  $G_c = 100$  e  $\zeta = 0,01$

Analisando os gráficos, observa-se que a Lei de Controle I apresenta maior eficiência na redução das amplitudes de vibração do sistema em comparação à Lei de Controle II. Essa diferença de desempenho foi constatada tanto pelas análises via método do balanço harmônico quanto por meio das simulações com o integrador numérico ode45, considerando as mesmas condições iniciais para  $G_c$  e  $\zeta$ . A aplicação da Lei de Controle I resultou em amplitudes significativamente menores, o que indica um efeito mais efetivo do ganho de controle na atenuação das oscilações.

Refazendo as simulações para uma nova razão de amortecimento  $\zeta = 0,001$ , observa-se que a amplitude total de oscilação do sistema aumentou em aproximadamente dez vezes em relação às simulações anteriores com  $\zeta = 0,01$ . Além disso, nota-se que a Lei de Controle I mantém sua estabilidade e amplitude máxima de oscilação praticamente inalteradas, independentemente do valor de  $\zeta$ . Já a Lei de Controle II demonstrou, novamente, menor eficiência no controle do sistema; contudo, para um sistema com menor rigidez estrutural, ela promove uma atenuação mais suave na resposta vibratória total.



**Figura 5:** HBM para a Lei de controle I com  $\zeta = 0,001$

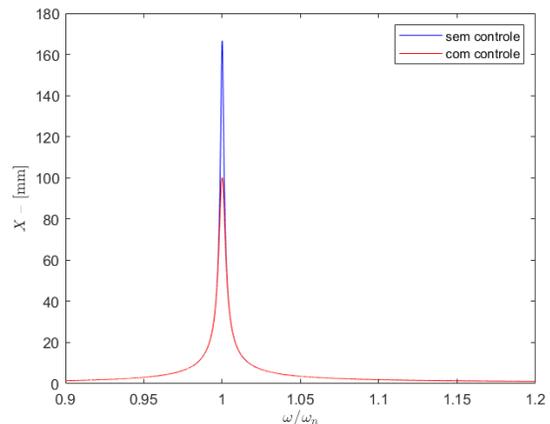


Figura 6: HBM para a Lei de controle II com  $\zeta = 0,001$

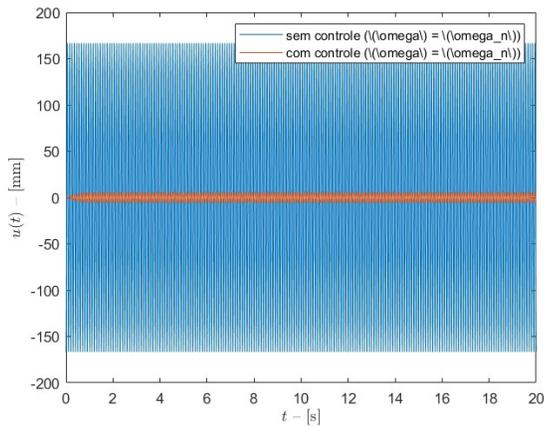


Figura 7: ode45 para a Lei de controle I com  $\zeta = 0,001$

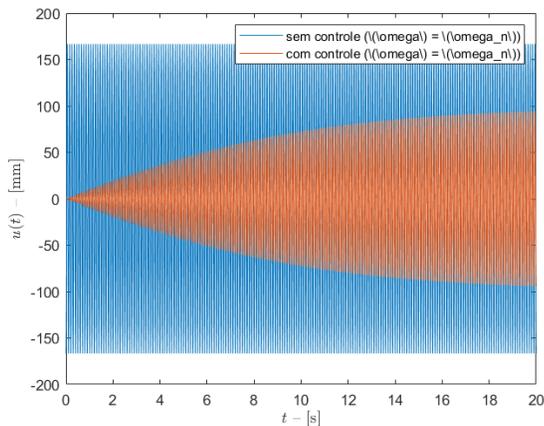


Figura 8: ode45 para a Lei de controle II com  $\zeta = 0,001$

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo o estudo e controle de vibrações em sistemas mecânicos submetidos a excitações periódicas, com foco na modelagem dinâmica de um sistema massa-mola amortecido e na implementação de estratégias de controle não linear. Partindo da formulação da equação de movimento e da caracterização da resposta dinâmica por meio de soluções analíticas e numéricas, foi possível investigar o comportamento do sistema em diferentes condições operacionais e sob distintas leis de controle.

Foram avaliadas duas abordagens de controle não linear: a primeira, dependente do cubo da velocidade, e a segunda, baseada em uma função cúbica mista de

deslocamento e velocidade. A análise foi conduzida por meio do método do balanço harmônico (HBM) e do método numérico ode45, permitindo avaliar a resposta do sistema tanto em regime permanente quanto em transiente.

Os resultados indicaram que a Lei de Controle I promoveu uma redução mais significativa das amplitudes de vibração em comparação à Lei de Controle II, considerando as mesmas condições para os parâmetros  $G_c$  e  $\zeta$ . Essa conclusão foi sustentada por ambas as abordagens metodológicas aplicadas. A atuação da Lei de Controle I se mostrou mais eficiente na dissipação da energia vibratória e no amortecimento da resposta dinâmica, resultando em menores amplitudes e comportamento mais estável. Isso evidencia o potencial dessa lei para aplicações práticas em sistemas que operam sob excitações ressonantes ou em ambientes sujeitos a variações de carga.

Além disso, o estudo reforça a importância do controle não linear como ferramenta versátil e eficaz no tratamento de sistemas mecânicos complexos, especialmente em situações nas quais técnicas lineares convencionais não apresentam desempenho satisfatório. A análise conduzida oferece uma base sólida para o desenvolvimento de dispositivos de controle semiativos ou híbridos, com possível integração a sistemas de recuperação de energia.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arias-Montiel, M., Silva-Navarro, G. and Antonio-Garcia, A. (2014), 'Active vibration control in a rotor system by an active suspension with linear actuators', *Journal of Applied Research and Technology* 12(5), 898–907.

da Silva, J. A. I., Marques, F. D., Sanches, L. and Michon, G. (2024), 'An enhanced nonlinear energy sink for hybrid bifurcation control and energy harvesting from aeroelastic galloping phenomena', *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* pp. 1–25.

da Silva, J., Sanches, L., Michon, G. and Marques, F. (2023), 'An enhanced electromagnetic-based nonlinear energy sink for hybrid passive control and energy harvesting from resonant vibrations.', *Acta Mechanica*.

Eski, I. and Yildirim, S. (2009), 'Vibration control of vehicle active suspension system using a new robust neural network control system', *Simulation Modelling Practice and Theory* 17(5), 778–793.

Liu, L., Milas, N., Mukai, A. H., Resende, X. R. and de Sá, F. H. (2014), 'The sirius project', *Journal of synchrotron radiation* 21(5), 904–911.